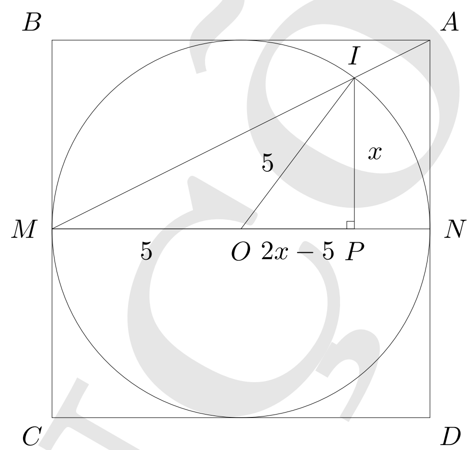
Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Sejam $x = \overline{PI}$ e O o centro da circunferência circunscrita ao quadrado $[ABCD]$.
   Os triângulos $[AMN]$ e $[IMP]$ são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{MP}}{x} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AN}} = 2, \text{ ou seja, } \overline{MP} = 2x.$$

Tendo em conta que $\overline{OI} = 5$, tem-se $\overline{OP} = \overline{MP} - 5 = 2x - 5$.



Por outro lado, o triângulo $[OPI]$ é retângulo em P e, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se

$$\overline{PI}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OI}^2$$

Logo

$$x^2 + (2x-5)^2 = 5^2, \text{ ou seja, } 5x^2 - 20x = 0,$$

de onde se conclui que $\overline{IP} = 4$.

5. Começamos por fixar uma das equipas portuguesas A. Para o jogo em casa desta equipa contra outra equipa portuguesa há 4 hipótese de escolha. Essa equipa vai jogar em casa contra uma das outras 3 equipas portuguesas. A terceira equipa C não pode jogar em casa contra A, porque sobrariam apenas duas equipas portuguesas que teriam que jogar entre si duas vezes. Sendo assim, C joga em casa contra uma das duas equipas que faltam, e esta recebe a última, que finalmente recebe a equipa A que fixámos originalmente. Este raciocínio não depende da equipa que escolhemos em primeiro lugar. Há assim $4 \times 3 \times 2 = 24$ escolhas para os jogos entre equipas portuguesas. De igual modo, há 24 escolhas para os jogos entre equipas espanholas.

Para os jogos entre equipas dos dois países, temos duas maneiras diferentes de organizar os jogos.

(a) Existem duas equipas portuguesas A e B e duas equipas espanholas X e Y tais que A e B jogam contra X e Y. Neste caso, é preciso apenas escolher se A joga em casa com X ou com Y, ou seja, há duas hipóteses. Neste cenário, as restantes $3+3$ equipas terão que jogar entre si. A "primeira" equipa portuguesa recebe uma das 3 espanholas e esta recebe uma das duas restantes portuguesas e assim sucessivamente, num total de $3 \times 2 \times 2 = 12$ escolhas diferentes.

Nesta maneira de organizar os jogos, é preciso ainda escolher as duas equipas portuguesas A e B de entre as cinco participantes, e as duas equipas espanholas X e Y. Em cada um dos casos, há 10 maneiras diferentes de escolher as duas equipas. Para este caso, temos um total de $2 \times 12 \times 10 \times 10 = 2400$ escolhas.

(b) Se a hipótese anterior não ocorrer, então a primeira equipa portuguesa recebe uma das 5 equipas espanholas, que recebe uma das 4 portuguesas que ainda não foi escolhida, e assim sucessivamente até a última equipa espanhola receber a primeira equipa portuguesa. Temos então $5 \times 4^2 \times 3^2 \times 2^2 = 2880$ escolhas.

Em conclusão, há $24 \times 24 \times (2400 + 2880) = 3041280$ maneiras diferentes de escolher os jogos deste campeonato.

6. Comecemos por ver que, se $n = i^2, i^2+1, \ldots, i^2+(i-1)$, para $i \geq 1$, o Alexandre tem uma estratégia ganhadora.

Na primeira jogada, o Alexandre tira $1 = 1^2$ ervilha.

Se o Bernardo tirar $1 \leq b \leq 2i-2$ ervilhas na jogada $2i-2$, para $i \geq 2$, o Alexandre pode tirar $1 \leq 2i-1-b \leq 2i-2$ ou $2 \leq 2i-b \leq 2i-1$ ervilhas na jogada $2i-1$, num total de $2i-1$ ou $2i$ ervilhas nestas duas jogadas. Designemos este total por $2i-1+\varepsilon_i$, com $\varepsilon_i = 0, 1$.

Assim, o Alexandre consegue garantir retirar um total de

$$1 + (3+\varepsilon_2) + (5+\varepsilon_3) + \cdots + (2i-1+\varepsilon_i) = i^2 + r,$$

onde $r = 0, \ldots, i-1$.

Vejamos agora que, se $n = i^2+i, i^2+(i+1), \ldots, i^2+2i$, para $i \geq 1$, o Bernardo tem uma estratégia ganhadora.

Se o Alexandre tirar $1 \leq a \leq 2i-1$ ervilhas na jogada $2i-1$, para $i \geq 1$, o Bernardo pode tirar $1 \leq 2i-a \leq 2i-1$ ou $2 \leq 2i+1-a \leq 2i$ ervilhas na jogada $2i$, num total de $2i$ ou $2i+1$ ervilhas nestas duas jogadas. Designemos este total por $2i+1-\varepsilon_i$, com $\varepsilon_i = 0, 1$.

Assim, o Bernardo consegue garantir retirar um total de

$$(3-\varepsilon_1) + (5-\varepsilon_2) + \cdots + (2i+1-\varepsilon_i) = (i+1)^2 - r - 1 = i^2 + (2i-r),$$

onde $r = 0, \ldots, i$.