Sugestões para a resolução dos problemas

4. Sejam x e y o número de espetadores e de lugares vazios no segundo jogo, respetivamente. Então, a lotação do estádio é $x + y$.

   No primeiro jogo houve $2x$ espetadores e $\frac{y}{3}$ lugares vazios. No terceiro jogo houve $x + 500$ espetadores. Logo,

   $$\begin{cases} x + y &= 2x + \frac{y}{3} \\ x + 500 &= \frac{x+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y &= 6x + y \\ 2x + 1000 &= x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y &= 3x \\ x + 1000 &= y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2000 \\ y &= 3000 \end{cases}$$

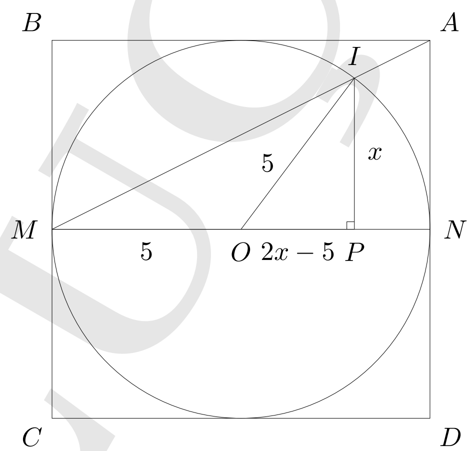
   Logo, o estádio tem $2000 + 3000 = 5000$ lugares.

5. Sejam $x = \overline{PI}$ e O o centro da circunferência circunscrita ao quadrado $[ABCD]$.

   Os triângulos $[AMN]$ e $[IMP]$ são semelhantes, logo

   $$\frac{\overline{MP}}{x} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AN}} = 2, \text{ ou seja, } \overline{MP} = 2x.$$

   Tendo em conta que $\overline{OI} = 5$, tem-se $\overline{OP} = \overline{MP} - 5 = 2x - 5$.



   Por outro lado, o triângulo $[OPI]$ é retângulo em P e, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se

   $$\overline{PI}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OI}^2$$

   Logo

   $$x^2 + (2x - 5)^2 = 5^2, \text{ ou seja, } 5x^2 - 20x = 0,$$

   de onde se conclui que $\overline{IP} = 4$.

6. Sejam $n = abcd$ e $\bar{n} = dcba$. Como $n - \bar{n}$ é positivo, temos $a \geq d$ e podemos escrever

$$n + \bar{n} = 1000(a + d) + 100(b + c) + 10(b + c) + (a + d)$$

e

$$n - \bar{n} = 1000(a - d) + 100(b - c) + 10(c - b) + (d - a)$$

Se $a = d$, então $n - \bar{n} = 100(b - c) + 10(c - b) = 90(b - c)$ não é uma capicua, pois termina em 0. Se $a + d$ tem dois algarismos, então o primeiro algarismo de $n + \bar{n}$ é 1. Se $n + \bar{n}$ é uma capicua, então $a + d = 11$. Além disso,

$$n + \bar{n} = 10000 + 1000 + 100(b + c) + 10(b + c + 1) + 1$$

é uma capicua apenas se $b = c = 0$. Neste caso, $n - \bar{n} = 1000(a - d) + (d - a)$ é uma capicua se e só se $a = 6$ e $d = 5$ e obtemos $n - \bar{n} = 999$.

Consideremos agora $a + d \leq 9$ e $d < a$. Então, se $b + c > 9$, o número $n + \bar{n}$ não é uma capicua pois o primeiro e último algarismos são diferentes. Temos assim de ter $b + c \leq 9$. Nestas condições, $n + \bar{n}$ é sempre uma capicua. Vamos analisar o número $n - \bar{n}$.

Seja $a - d = f \leq 9$. Então, $n - \bar{n} = 1000f + 100(b - c) + 10(c - b) - f$. Se $b = c$, então $n - \bar{n}$ é uma capicua se e só se $f = 1$ e obtemos $n - \bar{n} = 999$.

Suponhamos que $b - c = m \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Então, $n - \bar{n} = 1000f + 100(m - 1) + 10(9 - m) + (10 - f)$ e, portanto, temos de ter $f = a - d = 5$ e $m = b - c = 5$. Neste caso, temos $n - \bar{n} = 5445$.

Por fim, suponhamos que $c - b = m \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Então, $n - \bar{n} = 1000f - 100m + 10m - f = 1000(f - 1) + 100(10 - m) + 10(m - 1) + (10 - f)$ e, portanto, temos de ter $f = 1$ e $m = 1$. Neste caso, temos $n - \bar{n} = 909$.

Portanto, os possíveis valores para $n - \bar{n}$ são $909, 999$ e 5445.