OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XLII OPM - Final - 1° Dia - 22.03.2024 - Categoria B - 10°/12° anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Designemos por N o menor número escalabitano e por $s(n)$ a soma dos algarismos de um número inteiro n.

   Seja a o algarismo das unidades de N. Se fosse $a < 9$, então $s(N+1) = s(N)+1$, logo N e $N+1$ não poderiam ser ambos múltiplos de 17. Logo $a = 9$.

   Seja b o algarismo das dezenas de N. Se fosse $b < 9$, então $s(N+1) = s(N)-8$, logo N e $N+1$ não poderiam ser ambos múltiplos de 17. Logo $b = 9$.

   Portanto $s(N) \geq 18$ e como $s(N)$ é múltiplo de 17, temos $s(N) \geq 34$.

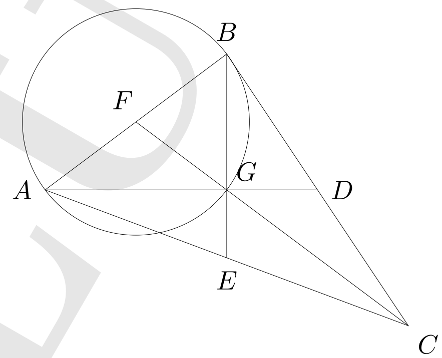
   Assim, os menores números n terminados em 99, com $s(n)$ múltiplo de 17, são 7999 e 8899.

   Para $n = 7999$, temos $s(n+1) = s(8000) = 8$.

   Para $n = 8899$, temos $s(n+1) = s(8900) = 17$.

   Portanto, $N = 8899$.

2. Seja G o baricentro de $[ABC]$, isto é, a interseção das medianas. Os triângulos $[BGF]$ e $[AFG]$ têm a mesma área (têm igual base, pois $\overline{BF} = \overline{FA}$ e a mesma altura relativamente a essa base). De igual modo, $[AFC]$ e $[BFC]$ têm a mesma área, e removendo $[BGF]$ e $[AFG]$, temos que $[AGC]$ e $[BGC]$ também têm áreas iguais. Repetindo este argumento para os restantes vértices, temos que os 3 triângulos $[AGB]$, $[BGC]$ e $[CGA]$ têm um terço da área de $[ABC]$.

   Como $[ABC]$ e $[BGC]$ partilham a base $[BC]$ e as medianas relativas a este lado estão sob a mesma resta e são proporcionais à altura relativas a este lado, temos que $\overline{AD} = 3\overline{GD}$. Analogamente, $\overline{CF} = 3\overline{FG}$ e $\overline{BE} = 3\overline{GE}$.

   Logo $\overline{AG} = \overline{AD} - \overline{GD} = \overline{AD} - \frac{\overline{AD}}{3} = 8$ e $\overline{BG} = \overline{BE} - \overline{ED} = \overline{BE} - \frac{\overline{BE}}{3} = 6$.

   Como $[AGB]$ é um triângulo retângulo em G, pelo Teorema de Pitágoras temos que $\overline{BA} = 10$. Notemos que este triângulo está inscrito numa semicircunferência centrada em F, logo $\overline{FG} = \overline{FA} = \frac{\overline{BA}}{2} = 5$.

   Logo $\overline{CF} = 3\overline{FG} = 15$.

3. Seja $p(n)$ o número de sequências legais com n algarismos, e $p_1(n)$ o número de sequências legais com n algarismos, acabadas em 1.

   Então, para todo o $n > 2$, temos que $p(n) = p_1(n) + p_1(n-1) + p_1(n-2)$, pois cada sequência acaba em "1", "10" ou "100".

   Temos também que, para todo o $n > 3$, $p_1(n) = p_1(n-1) + p_1(n-2) + p_1(n-3)$, pois cada sequência acabada em "1" acaba em "11", "101" ou "1001".

   Então:

$$\begin{array}{rcccccc} p(10) & = & p_1(10) & + & p_1(9) & + & p_1(8) \\ & = & 2p_1(9) & + & 2p_1(8) & + & p_1(7) \\ & = & 4p_1(8) & + & 3p_1(7) & + & 2p_1(6) \\ & = & 7p_1(7) & + & 6p_1(6) & + & 4p_1(5) \\ & = & 13p_1(6) & + & 11p_1(5) & + & 7p_1(4) \\ & = & 24p_1(5) & + & 20p_1(4) & + & 13p_1(3) \\ & = & 44p_1(4) & + & 37p_1(3) & + & 24p_1(2) \\ & = & 81p_1(3) & + & 68p_1(2) & + & 44p_1(1) \end{array}$$

   Finalmente resta ver que $p_1(1) = 1$, pois só existe a sequência "1", $p_1(2) = 2$, pois só existem as sequências "01" e "11", e $p_1(3) = 4$, pois só existem as sequências "111", "101", "011" e "001".

   Logo $p(10) = 81 \times 4 + 68 \times 2 + 44 \times 1 = 504$.