OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

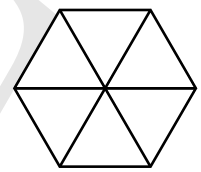
XLII OPM - Final - 1º Dia - 22.03.2024 - Categoria A - 8º/9º anos

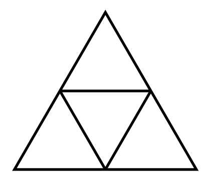
Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Cada criança comeu $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ de pizza. Portanto, o número de crianças é $30/\frac{5}{6}=30\times\frac{6}{5}=36$.
Opção correta: D)

(b) O comprimento de cada lado do triângulo equilátero é um terço do seu perímetro, e o comprimento de cada lado do hexágono regular é um sexto do seu perímetro e portanto mede metade do comprimento do lado do triângulo. Um hexágono regular é composto por seis triângulos equiláteros. Cada um desses triângulos tem um lado de comprimento igual a metade do lado da mesa triangular, e portanto a sua área é igual a um quarto da área da mesa triangular. Como a mesa hexagonal tem seis vezes a área de cada um dos seis triângulos que a compõem, deduzimos que a mesa hexagonal tem uma área $6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$ maior do que a mesa triangular.
Opção correta: C)

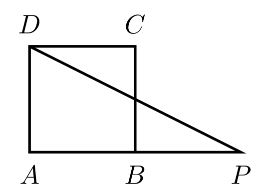




(c) Seja P o ponto onde está colocado o poste. Seja ℓ a medida do lado do quadrado. Temos $\overline{AD}=\ell$ e por simetria $\overline{AP}=2\overline{AB}=2\ell$.
Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que $\overline{AP}^2+\overline{AD}^2=\overline{DP}^2$. Logo,

$$(2\ell)^2+\ell^2=90^2 \Leftrightarrow 4\ell^2+\ell^2=8100 \Leftrightarrow \ell^2=1620\,.$$

Podemos assim concluir que área do quadrado $[ABCD]$ é 1620 dm^2.
Opção correta: B)



(d) Se dividirmos os sete grupos em dois conjuntos disjuntos, então um deles forma uma maioria ou então há um empate. Comecemos por fixar a votação de um dos grupos, por exemplo o maior. A divisão que pretendemos depende de cada um dos outros seis grupos decidir se vota no mesmo sentido ou sentido contrário. Se não houvesse empates, então haveria $2^6=64$ maiorias possíveis. Falta-nos apenas contar quantos empates podem existir, ou seja contar de quantas maneiras se pode dividir os números $75, 70, 40, 16, 13, 11$ e 5 em dois conjuntos de modo que a soma de cada conjunto dê 115. Há duas possibilidades $75+40=115=70+16+13+11+5$ e $75+16+13+11=115=70+40+5$. O número de maneiras de formar uma maioria é igual a $64-2=62$.
Opção correta: D)

2. Designemos por N o menor número escalabitano e por $s(n)$ a soma dos algarismos de um número inteiro n.

   Seja a o algarismo das unidades de N. Se fosse $a < 9$, então $s(N+1) = s(N) + 1$, logo N e $N+1$ não poderiam ser ambos múltiplos de 17. Logo $a = 9$.

   Seja b o algarismo das dezenas de N. Se fosse $b < 9$, então $s(N+1) = s(N) - 8$, logo N e $N+1$ não poderiam ser ambos múltiplos de 17. Logo $b = 9$.

   Portanto $s(N) \geq 18$ e como $s(N)$ é múltiplo de 17, temos $s(N) \geq 34$.

   Assim, os menores números n terminados em 99, com $s(n)$ múltiplo de 17, são 7999 e 8899.

   Para $n = 7999$, temos $s(n+1) = s(8000) = 8$.

   Para $n = 8899$, temos $s(n+1) = s(8900) = 17$.

   Portanto, $N = 8899$.

3. O maior inteiro é 8. Comecemos por notar que os conjuntos $\{1, 2, 4, 8\}$ e $\{3, 5, 6, 7\}$ formam uma distribuição válida dos números inteiros de 1 a 8.

   Vamos mostrar que não é possível uma distribuição válida dos números de 1 a 9. Suponhamos por absurdo que A e B formam uma distribuição válida dos inteiros de 1 a 9, com $1 \in A$. Temos duas possibilidades:

   - A tem um número $a \in \{6, 7, 8\}$
     Temos $a-1, a+1 \in B$. Como $2 + (a-1) = a+1$, então $2 \in A$. Como $2 + (a-2) = a$, temos $a - 2 \in B$.
     Mas $1 + 2 = 3$ e $(a-2) + 3 = a + 1$, logo não conseguimos colocar o 3.
   - $6, 7, 8 \in B$
     Como $2 + 6 = 8$, então $2 \in A$. Como $1 + 2 = 3$, então $3 \in B$. Como $3 + 4 = 7$, então $4 \in A$.
     Mas $1 + 4 = 5$ e $3 + 5 = 8$, logo não conseguimos colocar o 5.

   Concluímos assim que não existe uma distribuição válida dos números de 1 a 9.