Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Primeiro vamos escolher as duas crianças que ficaram a própria prenda. Existem dez maneiras de escolher duas crianças deste grupo $\{AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE\}$, onde cada criança é representada pela inicial do seu nome.

   Depois de fixarmos as duas crianças que ficaram com a prenda que levaram, por exemplo a Alice e a Beatriz, há apenas duas maneiras de trocar as prendas entre os outras três crianças: a Carla recebe a prenda do Delfim, o Delfim recebe a prenda do Eurico e o Eurico recebe a prenda da Carla; ou exatamente o oposto.

   Como este raciocínio não depende das duas crianças que fixámos inicialmente, é possível distribuir as prendas de $10 \times 2 = 20$ maneiras diferentes.

2. Comecemos por multiplicar ambos os lados de expressão por xy:

$$x^2y^2 + y + x = 1 + x^2y + y^2x$$

   Passando todos os termos para o lado esquerdo e agrupando os termos com o mesmo expoente em x obtemos:

$$\begin{aligned} x^2y^2 + y + x - 1 - x^2y - y^2x &= 0 \\ x^2(y^2 - y) + x(1 - y^2) + y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

   Então $y - 1$ é um fator do primeiro membro, pelo que podemos colocá-lo em evidência e agrupar os termos com o mesmo expoente em y

$$\begin{aligned} (y-1)(x^2y - x(1+y) + 1) &= 0 \\ (y-1)((x^2 - x)y - x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

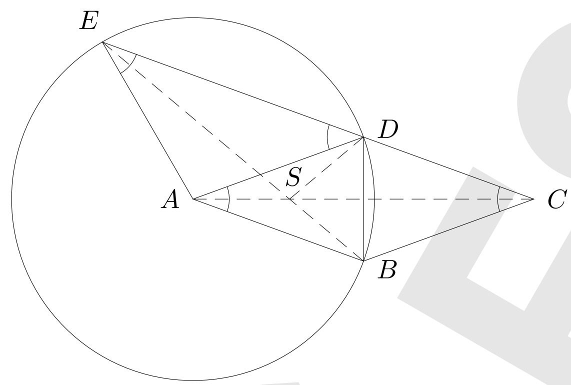
   Então $x - 1$ é um fator do primeiro membro, pelo que podemos colocá-lo em evidência

$$(y-1)(x-1)(xy-1) = 0$$

   Logo obtemos as três famílias de soluções:

   - $x = 1$ e $y \neq 0$;
   - $y = 1$ e $x \neq 0$;
   - $x \neq 0$ e $y = \frac{1}{x}$.

3. Como $[ABCD]$ é um losango, então $D\hat{A}C = C\hat{A}B = D\hat{C}A = B\hat{C}A = \alpha$.



Observe-se que o ângulo EDA é externo ao triângulo $[DAC]$, logo $E\hat{D}A = 2\alpha$. Uma vez que $\overline{EA} = \overline{AD}$, o triângulo $[EDA]$ é isósceles, temos $A\hat{E}D = A\hat{D}E = 2\alpha$ e $E\hat{A}D = 180° - 4\alpha$. Assim, $E\hat{A}B = 180° - 2\alpha$ e, como $[EAB]$ é isósceles, tem-se $A\hat{E}B = A\hat{B}E = \alpha$.

Por outro lado, S pertence a AC, a mediatriz de $[DB]$, logo $\overline{SB} = \overline{SD}$ e os triângulos $[ABS]$ e $[ADS]$ são congruentes. Então $A\hat{D}S = A\hat{B}S = \alpha$ e conclui-se que $A\hat{S}D = 180° - 2\alpha$.

Como os ângulos opostos do quadrilátero $[EASD]$ são suplementares podemos concluir que este quadrilátero é cíclico.

4. Consideremos um número N com o maior número possível de algarismos distintos. Seja a o menor dos seus algarismos e $b > a$ um algarismo distinto à sua direita.

Suponhamos primeiro que $a > 0$. Como cada algarismo interior é igual à diferença dos seus dois vizinhos, então os algarismos seguintes, se existirem, são os da sequência seguinte:

$$a, \quad b, \quad a+b, \quad a+2b, \quad 2a+3b, \quad 3a+5b$$

Como $3a+5b \geq 3\times 1+5\times 2 = 13$, esta sequência tem no máximo 5 algarismos. Isto acontece no caso em que $a=1$, $b=2$, obtendo-se a sequência 12358.

Repetindo o mesmo raciocínio à esquerda de a, concluimos que a maior sequência é 85321, obtendo-se $N = 8532112358$. No entanto, esta sequência não tem novos algarismos. Para maximizar a quantidade de novos algarismos, à esquerda de a devemos escolher a alternativa $b=3$, obtendo-se $N = 74312358$, que tem 7 algarismos distintos.

Se $a = 0$, este algarismo pode aparecer várias vezes em N, uma vez que podemos ter sequências

$$0, \quad b, \quad b, \quad 0$$

No entanto, estas sequências são todas iguais e, para além delas, só pode haver sequências (à direita ou à esquerda)

$$0, \quad b, \quad b, \quad 2b, \quad 3b, \quad 5b, \quad 8b$$

O número máximo de algarismos distintos neste caso é 6, como por exemplo, no número 8532110110112358.

Portanto, o número máximo de algarismos distintos num número indiferente é 7.