

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. A Alice, a Beatriz, a Carla, o Delfim e o Eurico fizeram uma troca de prendas. Cada um colocou uma prenda num saco e depois cada um deles tirou uma prenda. No final, dois deles ficaram com a prenda que tinham levado, e os outros três com prendas diferentes.

De quantas maneiras é possível as prendas terem sido distribuídas?

2. Determina todos os pares (x, y) de números reais tais que

$$xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} + x + y$$

3. Seja $[ABCD]$ um losango com o ângulo BAD agudo. A circunferência com centro em A e que passa por D intersesta a reta CD de novo no ponto E . As retas BE e AC intersestam-se no ponto S .

Mostra que existe uma circunferência que contém os pontos A, S, D e E .

4. Um número diz-se *indiferente* se cada um dos seus algarismos interiores (isto é, nem o primeiro nem o último) for igual à diferença dos seus dois vizinhos. Por exemplo, 20224 é um número indiferente com 3 algarismos distintos.

Qual é o maior número de algarismos distintos que um número indiferente pode ter?