XLII OPM - 2ª Eliminatória - 10.01.2024 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

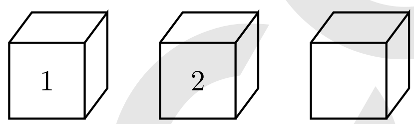
1. (a) Opção D. (*As dimensões dos paralelepípedos são* $1, 4, 32$ *e* $2, 8, 8$, *respetivamente, logo a área da superfície exposta é* $2 \times (128 + 32 + 4 + 64 + 16 + 16) - 16 - 2 \times 4 = 496$.)

   (b) Opção C. (*Se um pentágono tivesse quatro ângulos retos (consecutivos), então o primeiro e o quinto lado seriam paralelos. É fácil construir um pentágono com três ângulos retos.*)

   (c) Opção D. (*Para estar afastada* $30m$, *ela tem que estar a* 50 *passos da partida. Ela salta pela primeira vez quando está afastada um passo, e depois salta duas vezes por cada passo que se afasta mais,* $99 = 1 + 2 \times 49$.)

   (d) Opção B. (*Há* 10 *maneiras de escolher as duas crianças que recebem as próprias prendas, e duas maneiras de trocar as prendas entre as outras três.*)

2. Observe-se que se o Romeu colocar o algarismo 1 numa caixa que tenha duas caixas à sua direita, então não poderá colocar o algarismo 2 na caixa vizinha à direita. Ou seja, a configuração



não aparece.

Assim, apenas há dez formas de etiquetar as caixas:

0000000000	1011011011	2022022022
0110110110	1101101101	2110110110
0110110112		2110110112
0220220220		2202202202

3. Seja X o ponto de interseção da reta CP com a diagonal $[DF]$. Pretende-se provar que X coincide com o ponto Q e portanto C, P e Q são colineares.

   Os triângulos isósceles $[BCD]$ e $[DEF]$ têm um ângulo igual a $120°$ (ângulo em C e em E, respetivamente) e cada um dos outros ângulos mede $30°$. No triângulo $[CBP]$, também isósceles, uma vez que $CBP = 30°$, então cada um dos outros dois ângulos mede $75°$. Portanto, o ângulo DCP mede $120 - 75 = 45°$ e o ângulo CDX mede $120 - 30 = 90°$. O triângulo $[CDX]$ é retângulo em D e o ângulo em C é $45°$, logo o outro ângulo também mede $45°$. Portanto este triângulo é isósceles e tem-se $\overline{DX} = \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{DQ}$. Logo os pontos X e Q coincidem.

4. Vamos começar por ver o número de produtos possíveis com 2 dados, sem repetições:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2				8	10	12
3			9		15	18
4				16	20	24
5					25	30
6						36

Para ver os produtos possíveis com 3 dados, podemos substituir a linha de cima pelos 18 números diferentes da tabela anterior, obtendo:

	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
1	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
2												32		40	48	50	60	72
3								27			45		54			75	90	108
4												64		80	96	100	120	144
5																125	150	180
6																		216

Logo temos 40 possibilidades para o produto de 3 dados.