XLII OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2023 - Categoria B - 10°/12° anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. *(A tartaruga nada 10 km no mesmo tempo que o João nada 1 km.)*

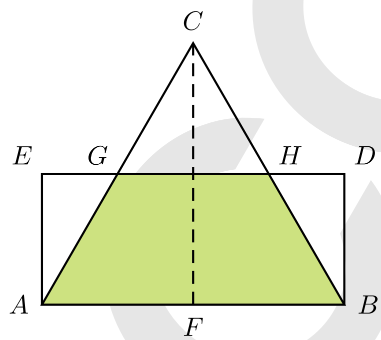
   (b) Opção D. $(2023^{2023} = (2023^4)^{505} \times 2023^3$; 2023^4 *termina em* 1 *e* 2023^3 *termina em* 7.)

   (c) Opção E. *(Os lados dos quadrados são* 1, 4, 8, 9, 10 *e* 11, *logo o retângulo tem área* $19 \times 21 = 399$.)

   (d) Opção C. *(Há* $15 \times 6 = 90$ *maneiras de distribuir os rapazes (e as raparigas);* $90 \times 90 = 8100$.)

2. Sejam F o pé da altura de $[ABC]$ relativamente ao lado $[AB]$, e G e H as interseções de $[DE]$ com $[CA]$ e $[CB]$, respetivamente.

Solução 1:



Dado que as áreas de $[ABC]$ e $[ABDE]$ são iguais, conclui-se que

$$\overline{DB} = \overline{EA} = \frac{1}{2}\overline{CF}.$$

Observa-se assim que os triângulos $[GHC]$ e $[ABC]$ são semelhantes com razão de semelhança 2. Desta forma, tem-se

$$\overline{AB} = 2 \times \overline{GH} \text{ e } \overline{GE} + \overline{HD} = \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

Assim, a área da região formada pela interseção de ambas as figuras é

$$\begin{aligned} &\text{área de } [ABDE] \text{ - área de } [GEA] \text{- área de } [HDB] = \\ &= \overline{AB} \times \overline{DB} - \frac{\overline{GE} \times \overline{EA}}{2} - \frac{\overline{HD} \times \overline{DB}}{2} \\ &= \overline{AB} \times \overline{DB} - \frac{(\overline{GE} + \overline{HD}) \times \overline{DB}}{2} \\ &= \overline{AB} \times \overline{DB} - \frac{\overline{AB}}{2} \times \frac{\overline{DB}}{2} \\ &= \frac{3}{4} \times \text{área de } [ABDE] = \frac{3}{4} \times \text{área de } [ABC]. \end{aligned}$$

Portanto, a razão entre a área da região formada pela interseção de ambas as figuras e a área de $[ABC]$ é $\frac{3}{4}$.

Solução 2: Seja x o comprimento do lado de $[ABC]$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $[AFC]$, tem-se

$$x^2 = \overline{FC}^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

pelo que $\overline{FC} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. Logo a área de $[ABC]$ é $\dfrac{x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

Dado que as áreas de $[ABC]$ e $[ABDE]$ são iguais, conclui-se que $\overline{DB} = \frac{\sqrt{3}}{4}x$.

Observa-se assim que os triângulos $[GHC]$ e $[ABC]$ são semelhantes com razão de semelhança 2, logo a área de $[GHC]$ é um quarto da área de $[ABC]$, ou seja, $\frac{\sqrt{3}}{16}x^2$.

Assim, a área da região formada pela interseção de ambas as figuras é $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{16}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{16}x^2$.

Portanto, a razão entre a área da região formada pela interseção de ambas as figuras e a área de $[ABC]$ é

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{16}x^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2} = \frac{3}{4}.$$

3. Sejam A, B e C os algarismos de N, isto é, $N = 100A + 10B + C$. Como N é pelo menos 100, S tem de ser pelo menos 200, e como S é soma de parcelas de números de 2 algarismos, a soma que origina S tem pelo menos 3 parcelas. Logo N tem 3 algarismos distintos ou 2 algarismos distintos e nenhum deles é 0.

   No segundo caso, S é soma de exatamente 3 parcelas. Notemos que $N - (10B + C) \geq 100$, logo $2N - (10B + C) \geq 200 > S - (10B + C)$, onde a última desigualdade resulta do facto de se estar a remover uma das parcelas da soma de S, logo é a soma de dois números de dois algarismos, sendo então menor que 200.

   Resta ver o caso em que todos os algarismos são distintos.

   Se A, B e C não forem 0, então existem 6 números possíveis, e cada algarismo aparece duas vezes nas unidades e duas vezes nas dezenas. Logo $S = 2 \times (10A + A + 10B + B + 10C + C) = 2 \times 11 \times (A + B + C)$. Como $S = 2N$, temos que $2 \times 11 \times (A + B + C) = 2 \times (100A + 10B + C)$, logo $B + 10C = 89A$, o que implica $A = 1$, $B = 9$ e $C = 8$.

   Se B ou C forem 0, comparando com S do caso anterior, podemos subtrair $A + B + C$, pois uma das parcelas é 0, e as outras são as parcelas da soma S que deixam de ser de dois algarismos. Logo $S = 21 \times (A + B + C)$. Como $S = 2N$ então $179A = B + 19C$, que por sua vez implica $A = 1$, $B = 8$ e $C = 9$, o que contradiz B ou C serem 0.

   Logo a única hipótese é $N = 198$.

4. Os números de 1 a 9 podem ser agrupados consoante o seu resto na divisão por 3:

   - $3, 6$ e 9 têm resto 0;
   - $1, 4$ e 7 têm resto 1;
   - $2, 5$ e 8 têm resto 2.

   Os números do primeiro grupo podem colocados em qualquer caixa, havendo um total de $3^3 = 27$ maneiras diferentes de o fazer.

   Suponhamos que os números do segundo grupo ficam na mesma caixa. Então os elementos do terceiro grupo também têm que ficar juntos. Neste caso, temos $3 \times 3 = 9$ maneiras de escolher as caixas respetivas.

   Suponhamos agora que os números do segundo grupo ficam em duas caixas. Um dos elementos fica sozinho e na sua caixa tem de ficar um elemento do terceiro grupo. Os outros dois elementos do segundo grupo ficam juntos e na sua caixa têm de ficar os outros dois elementos do terceiro grupo. Neste caso, temos $3 \times 3 = 9$ maneiras de escolher os elementos de cada grupo que ficam sozinhos e $3 \times 2 = 6$ maneiras de escolher as caixas, num total de $9 \times 6 = 54$ maneiras.

   Suponhamos finalmente que os números do segundo grupo ficam em três caixas. Em cada caixa tem de ficar um elemento do terceiro grupo. Neste caso, temos $3 \times 2 = 6$ maneiras de escolher as caixas para cada grupo, num total de $6 \times 6 = 36$ maneiras.

   Assim, ao todo, há $27 \times (9 + 54 + 36) = 27 \times 99 = 2673$ maneiras diferentes de colocar os números nas caixas.