XLII OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2023 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. (*No início há* 10 *degraus abaixo e* 20 *acima. Subindo* 9*, fica com* 24 *abaixo e* 6 *acima.*)

   (b) Opção B. ($L\widehat{M}N = 58°$, $P\widehat{M}N = 29°$, $M\widehat{P}N = 71°$, $M\widehat{O}N = 180 - (90 + 71) = 19°$.)

   (c) Opção D. (*Há* 10 *quadrados perfeitos* 7^2, $2^2 \times 7^2$, $3^2 \times 7^2, \ldots, 10^2 \times 7^2 = 4900$.)

   (d) Opção E. (*Os lados dos quadrados são* 1, 4, 8, 9, 10 *e* 11*; o retângulo tem área* $19 \times 21 = 399$.)

2. Se a equipa não conseguir nenhum ensaio convertido, então para atingir 24 pontos pode marcar ou zero ou três ensaios de 5 pontos. Sobram 24 e 9 pontos, respetivamente, que têm de ser atingidos com 8 ou 3 pontapés de 3 pontos.

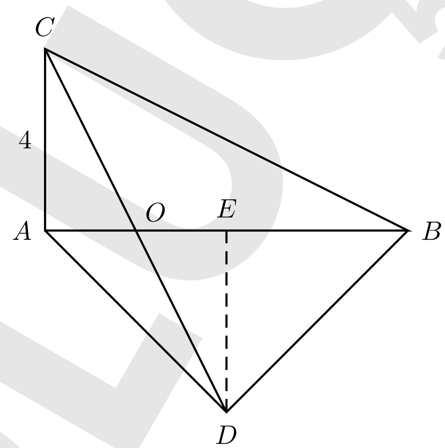
   Se a equipa conseguir um único ensaio convertido de 7 pontos, então os restantes 17 pontos têm necessariamente de vir de um único ensaio de 5 pontos e de quatro pontapés de 3 pontos.

   Se a equipa conseguir exatamente dois ensaios convertidos de 7 pontos, então os restantes 10 pontos têm necessariamente de vir de 2 ensaios de 5 pontos.

   Finalmente, se a equipa conseguir exatamente três ensaios convertidos de 7 pontos, os restantes 3 pontos têm de vir de um pontapé de 3 pontos.

   Há assim um total de $2 + 1 + 1 + 1 = 5$ formas da equipa conseguir 24 pontos.

3. Seja E o ponto médio de $[AB]$. Como o triângulo $[ADB]$ é retângulo e isósceles, tem-se $B\widehat{A}D = 45°$ e $A\widehat{E}D = 90°$. Assim, conclui-se que $[AED]$ é triângulo retângulo e isósceles com $\overline{ED} = \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{2} = 4$.



   Pelo critério de congruência ALA, os triângulos $[AOC]$ e $[EOD]$ são congruentes e, por isso, $\overline{AO} = \overline{OE}$.

   Assim, conclui-se que $\overline{OE} = \frac{\overline{AE}}{2} = 2$ e, portanto,

$$\overline{BO} = \overline{BE} + \overline{OE} = 4 + 2 = 6.$$

4. Se multiplicarmos por 4 o número obtido pelo Francisco, ficamos com o número inicial. Portanto, o algarismo das unidades do número inicial é 4.

$$\begin{array}{rr} \cdots & 6 \\ \times & 4 \\ \hline \cdots & 4 \end{array}$$

Então a multiplicação pode escrever-se como indicado abaixo. Portanto, o algarismo das dezenas do número inicial é 8.

$$\begin{array}{rrr} \cdots & 4 & 6 \\ & \times & 4 \\ \hline \cdots & 8 & 4 \end{array}$$

Repetindo o processo, obtemos sucessivamente:

$$\begin{array}{rrrr} \cdots & 8 & 4 & 6 \\ & & \times & 4 \\ \hline \cdots & 3 & 8 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} \cdots & 3 & 8 & 4 & 6 \\ & & & \times & 4 \\ \hline \cdots & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrr} \cdots & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ & & & & \times & 4 \\ \hline \cdots & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrr} 1 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ & & & & \times & 4 \\ \hline 6 & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

Logo, o menor número que o Francisco pode usar é o 615384.