XLI OPM - 2ª Eliminatória - 11.01.2023 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Questão 1: cada opção correta: 4 pontos cada opção errada: -1 ponto Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção B. $((2-0+2-3)\times(2^2-0^2+2^2-3^2)^2 = 1\times(-1)^2 = 1.)$

   (b) Opção E. (*A área branca mede o dobro da área do pinheiro, ou seja,* $4046\ cm^2$.)

   (c) Opção C. (*Existem* $4\times3\times8\times8 = 768$ *códigos de quatro algarismos que têm exatamente um* 1 *e exatamente um* 2. *Como metade desses códigos é ímpar,* 384 *deles são ímpares.*)

   (d) Opção C. (*Somando os três pesos dados* $(5+7+8=20)$ *obtém-se o dobro do peso total da fruta comprada. Logo, o Luís comprou* 10 *quilos de fruta.*)

2. Uma vez que o triângulo $[ABC]$ é equilátero, tem-se $E\widehat{C}D = A\widehat{C}B = 60^\circ$. Os triângulos $[CED]$ e $[C'ED]$ são iguais, logo, $C\widehat{D}E = E\widehat{D}C'$. No triângulo retângulo $[C'BD]$, tem-se que $C'\widehat{B}D = 60^\circ$ e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso, $B\widehat{D}C' = 30^\circ$.

   Mas como $C\widehat{D}E + E\widehat{D}C' + C'\widehat{B}D = 2\,C\widehat{D}E + 30 = 180^\circ$, vem $C\widehat{D}E = 75^\circ$. Finalmente, de novo usando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso, $C\widehat{E}D = 180-60-75 = 45^\circ$.

3. Um quinto dos habitantes tem bicicleta e $\frac{1}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ dos habitantes tem bicicleta e trotineta. Assim, apenas $\frac{1}{5}-\frac{1}{20} = \frac{3}{20}$ dos habitantes tem só bicicleta. Se um oitavo dos habitantes que têm trotineta também têm bicicleta, $8\times\frac{1}{20} = \frac{8}{20}$ dos habitantes têm trotineta, e $\frac{7}{20}$ dos habitantes têm apenas trotineta. Conclui-se assim que $\frac{9}{20} = 1-\frac{3}{20}-\frac{7}{20}-\frac{1}{20}$ dos habitantes não tem nem bicicleta nem trotineta. Como 2023 é o número de habitantes que têm os dois tipos de transporte (que sabemos ser $\frac{1}{20}$ dos habitantes e queremos $\frac{9}{20}$), resta multiplicar este número por 9, ou seja $9\times2023 = 18207$ habitantes não têm nem bicicleta nem trotineta.

4. Designemos os amigos da escola por A, B, C, D, E. Para escolher dois destes amigos, a Margarida tem 10 possibilidades: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE e DE.

   Designemos os amigos do clube por F, G, H, I, J, L, dos quais F e G são irmãos. A Margarida quer escolher 3 ou 4 destes amigos.

   Para escolher três destes amigos, a Margarida tem as seguintes possibilidades: se escolher F e G, ainda tem que escolher um dos restantes 4 amigos, ou seja, tem as possibilidades FGH, FGI, FGJ, FGL; se não escolher F nem G, tem as possibilidades HIJ, HIL, HJL, IJL. Logo, neste caso, a Margarida tem 8 possibilidades.

   Para escolher quatro destes amigos, a Margarida tem as seguintes possibilidades: se escolher F e G, ainda tem que escolher dois dos restantes 4 amigos, ou seja, tem as possibilidades $FGHI$, $FGHJ$, $FGHL$, $FGIJ$, $FGIL$, $FGJL$; se não escolher F nem G, só tem a possibilidade $HIJL$. Logo, neste caso, a Margarida tem 7 possibilidades.

   Portanto, a Margarida tem $8+7 = 15$ possibilidades para escolher os amigos do clube.

   Assim, ao todo, a Margarida tem $10\times15 = 150$ formas de escolher os amigos para a festa.