OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XLI OPM - 2ª Eliminatória - 11.01.2023 - Categoria B - 10°/12° anos

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Sejam $a < b < c$ três números. A diferença entre os dois maiores é $c - b$. Se somarmos os números dois a dois, obtemos os números $a + b < a + c < b + c$, e a diferença entre os dois maiores é $(b + c) - (a + c) = b - a$. Se voltarmos a fazer o mesmo procedimento, obtemos que a diferença entre os dois maiores números é igual a $(a+b+2c) - (a+2b+c) = c - b$, que é igual à diferença entre os dois maiores números da lista inicial. Assim, uma vez que $a < b < c$ são quaisquer, a diferença entre os dois maiores números de cada trio de números da lista alterna entre $c - b$ e $b - a$. Neste caso, como 2023 é ímpar, a diferença entre os dois maiores números é igual à diferença que obtemos no fim de efetuar o procedimento uma vez, ou seja, é $25 - 19 = 6$.

2. Como $2^{2x^2} + 4^{4y^4} < 8^{43}$, então $2^{2x^2} < 8^{43} = 2^{129}$. Portanto $2x^2 < 129$, ou seja, $1 \leq x \leq 8$.

   Também $4^{4y^4} < 8^{43}$, logo $2^{8y^4} < 2^{129}$. Portanto $8y^4 < 129$, ou seja, $1 \leq y \leq 2$.

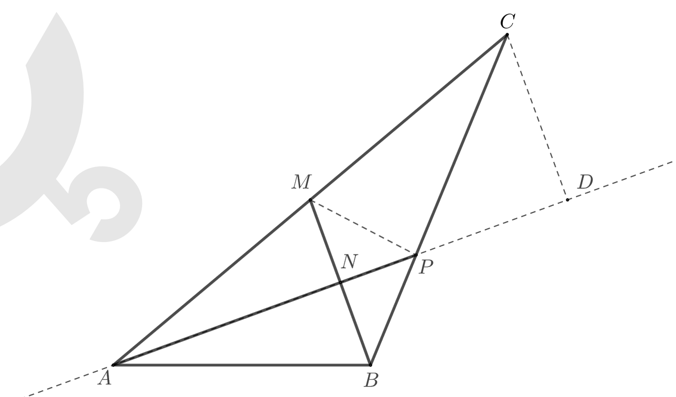
   Há 16 pares de inteiros (x, y) tais que $1 \leq x \leq 8$ e $1 \leq y \leq 2$.

   Destes pares, temos que eliminar o par $(8, 2)$, uma vez que

$$2^{2\times 8^2} + 4^{4\times 2^4} = 2^{128} + 4^{64} = 2^{128} + 2^{128} = 2^{129} = 8^{43}.$$

   Logo, há 15 pares que verificam a desigualdade.

3. Seja N a interseção de $[AP]$ e $[BM]$ e considere-se D o ponto em AP tal que $CD \perp AP$.
   Como $[MB] \perp [PA]$ e AN é a bissetriz de $\angle MAB$, conclui-se que N é o ponto médio de $[MB]$. Sendo N o pé da altura de $[MPB]$ relativa a $[MB]$, observa-se que $[MPB]$ é isósceles e $\overline{PB} = \overline{PM}$.
   Os triângulos $[ACD]$ e $[AMN]$ são semelhantes com razão de semelhança igual a 2, pois M é o ponto médio de $[AC]$. Assim, $\overline{CD} = 2\overline{MN} = 2\overline{NB}$. Uma vez que os triângulos $[PBN]$ e $[PCD]$ são semelhantes, conclui-se que a sua razão de semelhança também é igual a 2 e, portanto, $\overline{PC} = 2\overline{PB} = 2\overline{PM}$.



4. Comecemos por notar que, no final do torneio, é possível haver 5 jogadores com exatamente 2 pontos. Para isto acontecer, basta que 5 jogadores empatem todos os jogos entre si, e percam todos os restantes jogos. Assim, cada um destes 5 jogadores ganha $\frac{1}{2}$ ponto em cada um dos 4 empates que obteve, e 0 pontos nos restantes jogos, acabando com 2 pontos.

   Vamos agora ver que, no final do torneio, não pode haver 6 jogadores com exatamente 2 pontos. No total realizaram-se 45 jogos, havendo 45 pontos a distribuir pelos jogadores. Se existirem 6 jogadores com 2 pontos, temos que os restantes $45 - 2 \times 6 = 33$ pontos têm de ser distribuídos pelos restantes $10 - 6 = 4$ jogadores. Mas isto é impossível, porque estes 4 jogadores ganharam no máximo $6 \times 4 = 24$ pontos aos 6 jogadores empatados e dividiram os 6 pontos dos 6 jogos disputados entre si, fazendo no máximo $24 + 6 = 30$ pontos.

   Logo, no final do torneio, no máximo 5 jogadores ficaram com exatamente 2 pontos.