OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XLI OPM - 2ª Eliminatória - 11.01.2023 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. (*Ambos marcaram* 6 *golos com o pé e o Gonçalo marcou* 3 *golos de cabeça.*)

   (b) Opção E. (*Há* 10 *maneiras de escolher os dois jogadores que ficam com a mesma bola e duas maneiras de trocar as bolas entre os outros três.*)

   (c) Opção A. (*A diferença entre os dois maiores números alterna entre* 6 *e* 9.)

   (d) Opção D. (*O triângulo é retângulo, com catetos* $2+3$ *e* $2+10$ *e hipotenusa* $3+10$ *dm.*)

2. Sem perda de generalidade, suponhamos que o canto em falta é o canto superior esquerdo. Vamos numerar as linhas de cima para baixo e as colunas da esquerda para a direita.

   Notemos que a soma de todos os algarismos é $1+2+\cdots+8=36$, pelo que a soma dos algarismos de cada linha e de cada coluna deve ser $36/3=12$.

   Como só há uma possibilidade de escrever 12 como a soma de 8 com dois outros números distintos, $12=1+3+8$, a peça 8 tem de ficar na primeira linha ou na primeira coluna. Há assim 4 possibilidades para colocar a peça 8. Se esta peça for colocada na primeira linha, temos obrigatoriamente de colocar a peça 4 na restante casa desta linha. Por outro lado, na coluna que contém a peça 8 temos de colocar as peças 1 e 3 que podem ser colocadas de duas formas. Para cada uma das outras posições para a peça 8 também obtemos duas possibilidades, logo temos $4\times 2=8$ formas de colocar as peças $1,3,4,8$.

   É fácil verificar que após colocarmos estas peças, só existe uma forma de colocar as restantes de forma a que a soma dos algarismos em cada linha e cada coluna seja 12. O Bruno tem assim 8 formas de colocar as peças no tabuleiro.

3. O triângulo $[EDB]$ é isósceles com $D\hat{B}E=D\hat{E}B$. Também o triângulo $[EDA]$ é isósceles e $E\hat{A}D=E\hat{D}A$.

   Por outro lado, $\angle DEC$ é ângulo externo ao triângulo $[EDA]$, assim como $\angle CDE$ é ângulo externo ao triângulo $[EDB]$, logo $C\hat{E}D=2\times E\hat{D}A$ e $C\hat{D}E=2\times D\hat{E}B$.

   Dado que $C\hat{E}D+C\hat{D}E=180^\circ-68^\circ=112^\circ$, conclui-se que

   $$A\hat{F}B=E\hat{F}D=180^\circ-(E\hat{D}A+D\hat{E}B)=180^\circ-\frac{C\hat{E}D+C\hat{D}E}{2}=180^\circ-\frac{112^\circ}{2}=124^\circ.$$

4. Vamos dividir o problema em dois casos: no primeiro caso as 4 cartas têm todas números diferentes e no segundo caso as 4 cartas têm exatamente 3 números diferentes.

   No primeiro caso, podemos escolher uma carta de Copas de duas formas. Escolhida esta carta, restam duas possibilidades para a escolha da carta de Espadas. Escolhidas as de Copas e de Espadas, restam duas possibilidades para a escolha da carta de Ouros e, de forma análoga, temos duas possibilidades para a escolha da carta de Paus. Há no total, $2^4=16$ formas de escolher as cartas neste caso.

   No segundo caso, temos exatamente 3 números diferentes, pelo que teremos duas cartas com naipes diferentes mas com o mesmo valor numérico, que pode ser $2,3,4$ ou 5. Se este número for o 5, então as cartas com este valor têm de ser a de Ouros e a de Paus. Podemos agora escolher a carta de Copas de duas formas e, após esta escolha, temos duas possibilidades para a escolha da carta de Espadas, perfazendo 4 possibilidades.

Se o número comum a duas cartas for o 4, estas cartas podem ser a de Espadas e a de Ouros, a de Espadas e a de Paus, ou a de Ouros e a de Paus. Em cada um dos casos, temos respetivamente 2×3, 2×2 e 2×1 formas diferentes de escolher as restantes cartas, perfazendo um total de $6 + 4 + 2 = 12$ escolhas diferentes

Se o número comum for 3 (resp. 2), temos 6 formas de escolher as duas cartas que têm o mesmo valor numérico. Analisando estas 6 possibilidades, Copas e Espadas, ou Copas e Ouros, ou Copas e Paus, ou Espadas e Ouros, ou Espadas e Paus, ou Ouros e Paus, concluímos que há, respetivamente, 3×3, 2×3, 2×2, 1×3, 1×2, 1×1 formas de escolher as restantes cartas. Portanto, há no total, $9 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$ formas de escolher as cartas se a repetida tiver valor numérico 3 (resp. 2).

Concluímos assim que o Bruno tem $16 + 4 + 12 + 25 + 25 = 82$ formas de escolher as cartas.

spm