XLI OPM - 1ª Eliminatória - 9.11.2022 - Categoria B - 10º/12º anos

Questão 1: cada opção correta: 4 pontos cada opção errada: -1 ponto Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção C. (*O cubo tem volume* $5^3 = 125\ cm^3$ *e o paralelepípedo* $5 \times 6 \times 4 = 120\ cm^3$.)

   (b) Opção C. (*Tem-se* $a \geq b \geq c \geq 4$. *Uma solução possível é* $a = b = c = 4$.)

   (c) Opção D. (*A área da região branca é* $1 + (2+3) + (4+5) + (6+7) + (8+9) = 45$.)

   (d) Opção C. ($\frac{2}{3} < \frac{9}{13} < \frac{7}{10}$.)

2. Para que o produto dos números seja múltiplo de 4, é necessário escolher números pares.

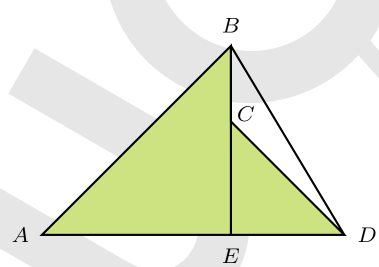
   Como queremos que o produto dos números não seja divisível por 8, nenhum dos subconjuntos pretendidos pode ter o número 8.

   Se escolhermos o número 4, não podemos escolher o 2 nem o 6. Os restantes dois números têm que pertencer ao conjunto $\{1,3,5,7,9\}$. Há dez possíveis escolhas para esses números: $\{1,3\}$, $\{1,5\}$, $\{1,7\}$, $\{1,9\}$, $\{3,5\}$, $\{3,7\}$, $\{3,9\}$, $\{5,7\}$, $\{5,9\}$ e $\{7,9\}$.

   Se não escolhermos o número 4, temos de escolher os números 2 e 6. O terceiro número tem de pertencer ao conjunto $\{1,3,5,7,9\}$ e, portanto, há 5 subconjuntos nas condições pretendidas.

   Obtemos assim um total de $10 + 5 = 15$ subconjuntos.

3. Considere-se o ponto E, interseção da reta CB com $[AD]$. Como $B\hat{A}D = A\hat{B}C = 45°$, conclui-se que $A\hat{E}C = 90°$ e $\overline{EB} = \overline{AE}$. Uma vez que $A\hat{D}C = 45°$, observa-se que $E\hat{C}D = 45°$ e, por isso, $\overline{ED} = \overline{EC}$.



   Ora,

$$\begin{aligned}
\text{Área de } [ABCD] &= \text{Área de } [ABE] + \text{Área de } [ECD] \\
&= \frac{\overline{AE} \times \overline{EB}}{2} + \frac{\overline{ED} \times \overline{EC}}{2} \\
&= \frac{\overline{EB}^2}{2} + \frac{\overline{ED}^2}{2}
\end{aligned}$$

   Sendo o triângulo $[EBD]$ retângulo, o Teorema de Pitágoras garante que $\overline{EB}^2 + \overline{ED}^2 = 8^2$, portanto

$$\text{Área de } [ABCD] = \frac{8^2}{2} = 32.$$

SOLUÇÕES

4. **Solução 1:** Suponhamos que os últimos três algarismos de um número superquadrado N são a, b e c. Assim, o algoritmo da multiplicação de abc por ele próprio é:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & a & b & c \\
 & & \times & a & b & c \\ \hline
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & b & c
\end{array}
$$

Então o algarismo das unidades de c^2 é c, pelo que $c = 0, 1, 5$ ou 6.

Se $c = 0$ ou $c = 1$, então $b = 0$, o que obriga a que $a = 0$, pelo que estes casos não dão origem a números superquadrados.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & a & b & 0 \\
 & & \times & a & b & 0 \\ \hline
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & b & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & a & b & 1 \\
 & & \times & a & b & 1 \\ \hline
 & & & a & b & 1 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & b & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & b & 1
\end{array}
$$

Se $c = 5$, então $10b + 2$ termina no algarismo b, logo $b = 2$. Portanto, $10a + 6$ termina no algarismo a, ou seja, $a = 6$. De facto, $625^2 = 390625$ é um número superquadrado.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & a & b & 5 \\
 & & \times & a & b & 5 \\ \hline
 & & \cdot & \cdot & 5b+2 & 5 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & 5b & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & b & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & a & 2 & 5 \\
 & & \times & a & 2 & 5 \\ \hline
 & & \cdot & 5a+1 & 2 & 5 \\
 & \cdot & \cdot & 5 & 0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & 5a & & \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & 2 & 5
\end{array}
$$

Se $c = 6$, então $12b + 3$ termina no algarismo b, logo $b = 7$. Portanto, $12a + 7$ termina no algarismo a, ou seja, $a = 3$. De facto, $376^2 = 141376$ é um número superquadrado.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & a & b & 6 \\
 & & \times & a & b & 6 \\ \hline
 & & \cdot & \cdot & 6b+3 & 6 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & 6b & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & b & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & a & 7 & 6 \\
 & & \times & a & 7 & 6 \\ \hline
 & & \cdot & 6a+4 & 5 & 6 \\
 & \cdot & \cdot & 3 & 2 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & 6a & & \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & 7 & 6
\end{array}
$$

Solução 2: Se $N = n^2$ é superquadrado, então n^2 e n coincidem nos três últimos algarismos, logo $n^2 - n$ é múltiplo de 1000.

Então $n(n-1)$ é múltiplo de $2^3 \times 5^3$. Como n e $n-1$ são primos entre si, então não têm fatores comuns. Logo n é múltiplo de 5^3 e $n-1$ é múltiplo de 2^3 ou vice-versa.

No primeiro caso, $n = 125$, 250, 375, 500, 625, 750 ou 875 e apenas quando $n = 625$ é que se tem $n-1$ múltiplo de 8. De facto, $625^2 = 390625$ é um número superquadrado.

No segundo caso, $n = 126$, 251, 376, 501, 626, 751 ou 876 e apenas $n = 376$ é múltiplo de 8. De facto, $376^2 = 141376$ é um número superquadrado.

Portanto, os números superquadrados são 141376 e 390625.

SOLUÇÕES