Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Escrevendo mais alguns termos da sucessão, tem-se

$$\mathbf{8}, \mathbf{6}, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, 2, 2, 4, 6, 0, 6, 6, 2, 8, 0, 8, \mathbf{8}, \mathbf{6}, \ldots$$

ou seja, a sucessão repete-se de 20 em 20 termos. Como $2022 = 101 \times 20 + 2$, o termo 2022 vai ser 6.

Opção correta: D)

(b) Se não houvesse a mesa, a soma da diferença de alturas entre o Tom e o Jerry com a diferença de alturas entre o Jerry e o Tom era zero. Como a cada uma das diferenças adicionamos a altura da mesa, vem que o dobro da altura da mesa é a soma das diferenças das alturas, logo $20 + 100 = 120$. Assim, a altura da mesa é 60 cm.

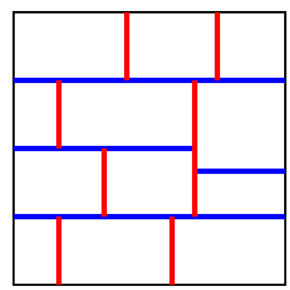
Opção correta: B)

(c) Por construção, os quadriláteros $[APDS]$ e $[DQCR]$ são paralelogramos, logo $\overline{AP} = \overline{SD}$ e $\overline{DR} = \overline{QC}$. Então $\overline{PQ} + \overline{RS} = \overline{PQ} + \overline{SD} + \overline{DR} = \overline{PQ} + \overline{AP} + \overline{QC} = \overline{AC} = 7$ cm.

Opção correta E).

(d) A soma dos perímetros de todos os retângulos contém a medida de 4 lados da parede no perímetro do quadrado; no interior há mais 3 conjuntos de segmentos horizontais que formam um lado (que se têm de contar duas vezes por terem sobreposições de dois lados de perímetros de azulejos) e 2 conjuntos de segmentos verticais que formam um lado (que se têm de contar duas vezes por terem sobreposições de dois lados de perímetros de azulejos). Portanto, a soma dos perímetros de todos os retângulos é igual a $4 + 2 \times 6 + 2 \times 2 = 14$ vezes o lado da parede, logo o lado mede $4200/14 = 300$ cm.

Opção correta C)



5. Comecemos por notar que ter-se $\Diamond\bigcirc\square - \bigcirc\square\Diamond = 126$ equivale a ter-se $\bigcirc\square\Diamond + 126 = \Diamond\bigcirc\square$. Fica então claro que:

- $\square$ é o algarismo das unidades de $6 + \Diamond$;
- $\bigcirc$ é o algarismo das unidades da soma de $2 + \square$ com o algarismo das dezenas de $6 + \Diamond$ (que se considera 0 se esta soma for inferior a 10);
- $\Diamond$ é a soma de $1 + \bigcirc$ com o algarismo das centenas de $26 + \square\Diamond$. Em particular, devemos ter $\Diamond \geq 1$ e $\bigcirc \leq 8$.

Ou seja, para cada valor possível de $\Diamond$, existe no máximo uma solução.

Solução 1: Analisamos então cada uma das possibilidades, começando por escolher $\triangle$:

$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$	É solução?
1	7	9	Não, porque devemos ter $\bigcirc \leq 8$
2	8	0	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 082$
3	9	1	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 193$
4	0	3	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 304$
5	1	4	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 415$
6	2	5	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 526$
7	3	6	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 637$
8	4	7	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 748$
9	5	8	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 859$

Solução 2: Observando que, se $\bigcirc\square\triangle$ é uma solução, então $\bigcirc\square\triangle + 111$ também é, e que $\bigcirc\square\triangle = 082$ é uma solução, encontramos imediatamente as soluções 193, 304, 415, 526, 637, 748 e 859. Fica-nos a faltar considerar o caso em que $\triangle = 1$. Se $\triangle = 1$, então necessariamente $\square = 7$ e $\bigcirc = 9$. Mas esta atribuição não conduz a uma solução uma vez que, como já observado, devemos ter $\bigcirc \leq 8$.

Resposta: O número $\bigcirc\square\triangle$ pode tomar os seguintes valores: 082, 193, 304, 415, 526, 637, 748 e 859.

6. Sejam a, b, c, d, e, f os números escritos nas faces do cubo tais que a e f estejam em faces opostas, e o mesmo aconteça com o par b e e e com o par c e d. Então, temos

$$\begin{aligned}
165 &= abc + ace + aed + adb + fbc + fce + fed + fdb \\
&= a(bc + ce + ed + db) + f(bc + ce + ed + db) \\
&= (a + f)(bc + ce + ed + db) \\
&= (a + f)(b + e)(c + d)
\end{aligned}$$

Como cada fator $a + f$, $b + e$ e $c + d$ é um inteiro positivo maior do que 1, segue-se da unicidade da decomposição em primos de $165 = 3 \times 5 \times 11$ que os conjuntos $\{a + f, b + e, c + d\}$ e $\{3, 5, 11\}$ são iguais. Assim, a soma pretendida é $(a + f) + (b + e) + (c + d) = 3 + 5 + 11 = 19$.