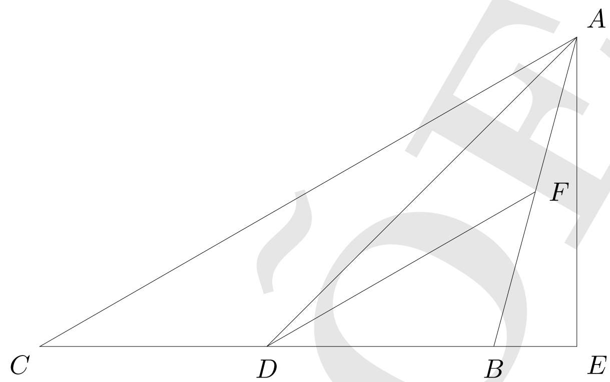
Sugestões para a resolução dos problemas

4. **Solução 1:** Seja $[AE]$ a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao lado $[BC]$ e seja F um ponto de $[AB]$ tal que $[DF]$ é paralelo a $[AC]$.



Como $A\widehat{D}E = A\widehat{D}B = 45°$, o triângulo retângulo $[AED]$ é isósceles e, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{AD} = \sqrt{2}\,\overline{AE}$. Além disso, sendo $A\widehat{C}B = 30°$, tem-se $\overline{AC} = 2\overline{AE}$.

Por outro lado, $[DF]$ é paralelo a $[AC]$ logo $C\widehat{A}D = A\widehat{D}F$ e, sendo D o ponto médio de $[CB]$, tem-se $\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{AE}$.

Assim, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \sqrt{2}$ e $\frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \sqrt{2}$ e, tendo em conta que $C\widehat{A}D = A\widehat{D}F$, podemos concluir pelo critério LAL (de semelhança de triângulos) que os triângulos $[AFD]$ e $[CDA]$ são semelhantes, ou seja, $D\widehat{A}F = A\widehat{C}D = 30°$.

Solução 2: Seja $\alpha = D\widehat{A}B$. Aplicando a Lei dos senos ao triângulo $[ACD]$ tem-se

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\sin 30°}{\sin 15°} = \frac{1}{2\sin 15°}.$$

A Lei dos senos aplicada ao triângulo $[ADB]$ garante que

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} &= \frac{\sin(180° - (45° + \alpha))}{\sin\alpha} = \frac{\sin(45° + \alpha)}{\sin\alpha}\\ &= \frac{\sin 45° \cos\alpha + \cos 45° \sin\alpha}{\sin\alpha}\\ &= \sin 45° \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos 45°.\end{aligned}$$

Tendo em conta que $\overline{CD} = \overline{DB}$, tem-se

$$\sin 45^\circ \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos 45^\circ = \frac{1}{2\sin 15^\circ},$$

ou seja,

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\sin 45^\circ \sin 15^\circ} - 1.$$

Ora $2\sin 45^\circ \sin 15^\circ = \cos 30^\circ - \cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, logo

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} - 1 = \sqrt{3},$$

ou seja $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e, por isso conclui-se que $\alpha = 30^\circ$.

5. **Solução 1:** A probabilidade é a proporção entre o número de sorteios em que um dos jogadores amadores é apurado para as meias-finais ($casos\ favoráveis$) e o número total de sorteios ($casos\ possíveis$).

   Num sorteio, começa-se por escolher um dos 16 jogadores, depois sorteia-se um dos restantes 15 jogadores para seu adversário. De seguida sorteia-se o segundo jogo, escolhendo um dos 14 jogadores ainda disponíveis e o seu adversário entre os restantes 13 jogadores. Sem perda de generalidade, podemos supor que os vencedores destes dois jogos se defrontam na eliminatória seguinte. Há assim $16 \times 15 \times 14 \times \cdots \times 2 \times 1 = 16!$ sorteios possíveis.

   Para que um jogador amador se qualifique para as meias-finais, é necessário que haja, pelo menos, dois jogos da primeira eliminatória entre jogadores amadores e que os vencedores desses jogos joguem entre si nos quartos-de-final. Para isso acontecer, tem que haver quatro jogadores amadores a serem sorteados nas posições $1-4$, ou, equivalentemente, nas posições $5-8$, nas posições $9-12$, ou ainda, nas posições $13-16$. Para cada um destes casos, há $6 \times 5 \times 4 \times 3$ hipóteses. Para sortear as restantes 12 equipas há $12 \times 11 \cdots \times 2 \times 1 = 12!$ hipóteses. O números de sorteios favoráveis é portanto: $4 \times (6 \times 5 \times 4 \times 3) \times 12!$

   A probabilidade que pretendemos calcular é:

$$\frac{4 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 12!}{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12!} = \frac{3}{7 \times 13} \approx 3,3\%$$

   Solução 2: Os 16 jogadores são divididos em quatro grupos de 4 jogadores, e só é possível que um jogador amador esteja nas meias-finais se um destes grupos tiver apenas jogadores amadores.

   Há um total de $\binom{16}{4}$ conjuntos de quatro equipas, e $\binom{6}{4}$ conjuntos de quatro equipas amadoras. Como não é possível sortear dois grupos só com equipas amadoras, a probabilidade é:

$$4 \times \frac{\binom{6}{4}}{\binom{16}{4}} = \frac{4 \times 6! \times 12! \times 4!}{16! \times 4! \times 2!} = \frac{3}{7 \times 13} \approx 3,3\%$$

6. Se o Xavier escolher números cuja soma é o número par $2S$, então o Zé pretende formar dois grupos com soma S.

   Vamos mostrar que o Xavier consegue garantir a vitória se e só se b for ímpar (independentemente de a).

   - Se b for ímpar, o Xavier consegue garantir a vitória.

     Para isso, sendo N um inteiro qualquer maior do que $\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$, basta escolher números entre N e $N+a-1$.

     Se o Zé formar um grupo com $\dfrac{b-1}{2}$ números (ou menos), terá uma soma no máximo de $\dfrac{b-1}{2}\times(N+a-1)$.

     Se o Zé formar um grupo com $\dfrac{b+1}{2}$ números (ou mais), terá uma soma no mínimo de $\dfrac{b+1}{2}\times N$.

     Como $\left(\dfrac{b+1}{2}\times(N+a-1)\right)-\left(\dfrac{b-1}{2}\times N\right)=N-\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}>0$, então o Zé não consegue formar um grupo cuja soma seja S.

   - Se b for par, o Xavier não consegue garantir a vitória:

     Solução 1: Suponhamos que o Xavier conseguia escolher números com os quais não seria possível formar dois grupos com soma S.

     Consideremos um grupo A com $\frac{b}{2}$ elementos cuja soma seja o maior possível, mas menor que S. Seja B o grupo formado pelos números restantes.

     Se em A houvesse algum número n tal que em B estivesse o número $n+1$, então, trocando estes números, obter-se-ia um grupo com soma maior do que a de A e menor do que S, contradizendo a definição do grupo A.

     Assim, concluímos que em A não está nenhum número cujo número seguinte esteja em B, ou seja, A contém os $\frac{b}{2}$ maiores números escolhidos pelo Xavier. Isto contradiz o facto de que a soma dos números de A é menor do que S.

     Solução 2: O Zé consegue ganhar usando a seguinte estratégia. Ele começa por ordenar os b números de forma crescente $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_b$. A diferença entre dois números consecutivos ou é 0 ou é 1. O Zé vai dividir os números por dois conjuntos A e B, com o mesmo número de elementos, da seguinte maneira:

     (a) x_1 fica no conjunto A e x_2 fica no conjunto B;

     (b) quando cada conjunto já tiver k elementos, se as somas dos elementos de A e de B forem iguais, coloca x_{2k+1} no conjunto A e x_{2k+2} no conjunto B;

     (c) se a soma dos elementos de A e de B forem diferentes, coloca x_{2k+1} no conjunto B e x_{2k+2} no conjunto A.

     Em cada passo a soma de cada um dos conjuntos ou é igual ou difere em uma unidade. No final de distribuídos os b números a soma total é par, e por isso a soma de cada um dos conjuntos A e B tem que ser igual.