

*Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.  
Não é permitido o uso de calculadoras.*

4. Seja  $[AD]$  uma mediana do triângulo  $[ABC]$ . Sabendo que  $\widehat{ADB} = 45^\circ$  e  $\widehat{ACB} = 30^\circ$ , mostra que  $\widehat{BAD} = 30^\circ$ .

5. Numa competição de badminton participam 16 jogadores, dos quais 10 são profissionais e 6 são amadores. Numa primeira fase, são sorteados oito jogos. Entre os oito vencedores destes jogos, são sorteados quatro jogos. Os quatro vencedores ficam qualificados para as meias-finais da competição.

Supondo que, sempre que um jogador profissional e um amador jogam entre si, o profissional ganha o jogo, qual é a probabilidade de um jogador amador conseguir chegar às meias-finais da competição?

6. Dados dois números naturais  $a < b$ , o Xavier e o Zé jogam o seguinte jogo.

Primeiro, o Xavier escreve  $a$  números consecutivos à sua escolha; depois, repete alguns deles, também à sua escolha, até ter  $b$  números, com a condição de que a soma dos  $b$  números escritos seja um número par.

O Zé ganha o jogo se conseguir separar os números em dois grupos com a mesma soma. Caso contrário, ganha o Xavier.

Por exemplo, para  $a = 4$  e  $b = 7$ , se o Xavier escrevesse os números 3, 4, 5, 6, 3, 3, 4, o Zé poderia ganhar, separando estes números nos grupos 3, 3, 4, 4 e 3, 5, 6.

Para que valores de  $a$  e  $b$  é que o Xavier consegue garantir a vitória?