XL OPM - Final - 2º Dia - 09.04.2022 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Uma vez que $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ e $\frac{63\times 64}{2}=2016<2022<2080=\frac{64\times 65}{2}$, o 2022° termo é o número $2022-2016=6.$

5. Comece-se por observar que, sendo M o ponto médio do lado $[AC]$, tem-se que $[MD]$ mede metade da altura de A relativamente ao lado $[BC]$, logo

$$\text{área de } [ABC]=\overline{MD}\times\overline{BC}.$$

Por outro lado, os triângulos $[MDC]$ e $[EBC]$ são semelhantes e, por isso,

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}, \text{ ou seja, } \overline{CD}\times\overline{EB}=\overline{MD}\times\overline{BC}.$$

Assim,

$$\text{área de } [CDE]=\frac{\overline{CD}\times\overline{EB}}{2}=\frac{\overline{MD}\times\overline{BC}}{2}=\frac{1}{2}\text{ área de } [ABC]$$

e, portanto, área de $[CDE]=12.$

6. Seja n o número de alunos com quem o João vai partilhar as moedas e seja a_i o número de moedas que o aluno número i recebe. Então $a_i=a_{i-1}\pm 1$ para $i=2,\ldots,n$. O João não consegue repartir as moedas por $n\leq 11$ colegas, uma vez que

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\leq 3+4+\cdots+13=88<99.$$

O mesmo ocorre quando $n=12$ e $a_1=1$ ou $a_1=2$, uma vez que

$$a_1+a_2+\cdots+a_{12}\leq 2+3+\cdots+13=90<99.$$

Consideremos agora o caso $n=12$ e $a_1=3$. Se o aluno número i recebe uma moeda a mais do que o aluno número $i-1$, para todo o i, temos

$$a_1+a_2+\cdots+a_{12}=3+4+\cdots+14=102>99.$$

Por outro lado, se um e apenas um aluno, digamos o número k, recebe uma moeda a menos do que o colega que o precede, então o número de moedas a distribuir é igual a $102-2j$, onde $j=12-(k+1)$. Se mais um aluno, digamos o número $k'\neq k$, recebe uma moeda a menos do que o colega que o precede, então o número de moedas a distribuir é igual a $102-2j-2j'$, onde $j'=12-(k'+1)$. Ou seja, por cada aluno que recebe menos uma moeda do que o colega que o precede, o número total de moedas a distribuir diminui por um múltiplo de 2. Como $102-2\ell$ é um número par, não é possível distribuir as 99 moedas por 12 colegas quando o primeiro recebe 3 moedas.

Consideremos agora o caso $n = 13$. Se $a_1 = 1$ temos $1 + 2 + \cdots + 13 = 91 < 99$ e se $a_1 = 2$ o número $2 + 3 + \cdots + 14 = 104$ é par. Usando o raciocínio anterior, concluímos que não é possível distribuir as 99 moedas nestes dois casos. Suponhamos agora que $a_3 = 3$. Neste caso, temos

$$3 + 4 + \cdots + 15 = 117 > 99.$$

Como vimos atrás, por cada aluno que recebe menos uma moeda do que o colega que o precede, o número total de moedas a distribuir diminui 2ℓ unidades, para certo inteiro ℓ. Queremos $99 = 117 - 2\ell$, o que implica $\ell = 9$. Portanto, cada partição do inteiro 9 em parcelas positivas e distintas dá origem a uma distribuição das 99 moedas por 13 pessoas. Temos as seguintes partições: $9, 8+1, 7+2, 6+3, 5+4, 6+2+1, 5+3+2$ e $4+3+2$, que correspondem às seguintes distribuições das moedas:

$$(3,4,5,6,5,6,7,8,9,10,11,12,13),\ (3,4,5,6,7,6,7,8,9,10,11,12,11),$$
$$(3,4,5,6,7,8,7,8,9,10,11,10,11),\ (3,4,5,6,7,8,9,8,9,10,9,10,11),$$
$$(3,4,5,6,7,8,9,10,9,8,9,10,11),\ (3,4,5,6,7,8,9,10,11,10,9),$$
$$(3,4,5,6,7,8,9,10,9,10,9,10,9),\ (3,4,5,6,7,8,9,10,11,10,9,8,9).$$

Portanto, 13 é o menor número de colegas do João para os quais é possível fazer a distribuição das 99 moedas e há 8 formas diferentes de fazer esta distribuição.