Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Cada um dos 14 colegas do Raul pode estar à sua esquerda ou à sua direita, logo há 2^{14} possibilidades. Para cada uma destas possibilidades, os alunos ficam automaticamente ordenados, logo não há mais escolhas a fazer. Temos apenas que retirar os casos em que o Raul está nos extremos. Logo há $2^{14} - 2$ maneiras de formar a fila.

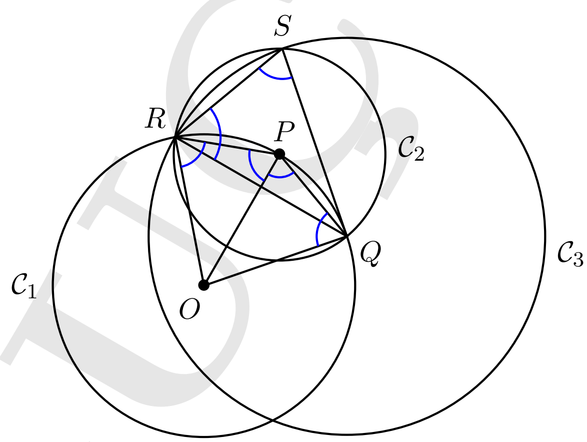
2. **Solução 1:** Sejam O o centro de $\mathcal{C}_1$ e $\alpha = O\widehat{Q}P$. Como $\overline{OP} = \overline{OQ}$, então também $O\widehat{P}Q = \alpha$.

   Como $\overline{PR} = \overline{PQ}$, então $[OPQ]$ e $[OPR]$ são congruentes, logo $O\widehat{R}P = O\widehat{P}R = \alpha$.

   Como $\angle RSQ$ está inscrito em $\mathcal{C}_3$, então, pelo teorema do arco capaz, $R\widehat{S}Q = \dfrac{R\widehat{P}Q}{2} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$.

   Como $\overline{QS} = \overline{QR}$, então $Q\widehat{R}S = R\widehat{S}Q = \alpha$.

   Portanto, todos os ângulos assinalados na figura são congruentes.



Logo, $R\widehat{Q}S = 180° - 2\alpha$ e $P\widehat{Q}R = 180° - \dfrac{2\alpha}{2} = 90° - \alpha$, pelo que $P\widehat{Q}S = R\widehat{Q}S - P\widehat{Q}R = (180° - 2\alpha) - (90° - \alpha) = 90° - \alpha$.

Portanto, $O\widehat{Q}S = O\widehat{Q}P + P\widehat{Q}S = \alpha + (90° - \alpha) = 90°$.

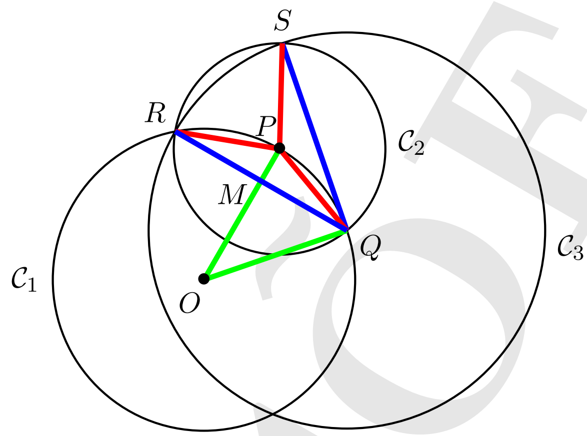
Solução 2: Sejam O o centro de $\mathcal{C}_1$ e M o ponto de interseção de OP com QR.

Como $\overline{QR} = \overline{QS}$ e $\overline{PR} = \overline{PQ} = \overline{PS}$, então $[PQR]$ e $[PQS]$ são congruentes. Logo, $P\widehat{Q}R = P\widehat{Q}S$.

Como $\overline{OP} = \overline{OQ}$, então $O\widehat{P}Q = O\widehat{Q}P$.

Portanto, $O\widehat{Q}S = O\widehat{Q}P + P\widehat{Q}S = O\widehat{P}Q + P\widehat{Q}R = 180° - P\widehat{M}Q$.

Uma vez que $[OP]$ é a mediatriz de $[QR]$, tem-se $P\widehat{M}Q = 90°$, pelo que $O\widehat{Q}S = 90°$.



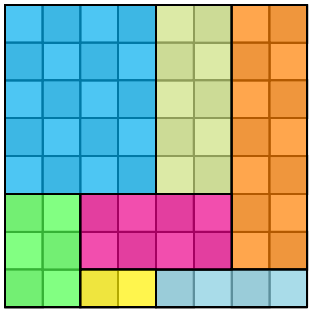
3. Como todos os retângulos têm um número diferente de quadrados, podemos assumir que $A_1 < A_2 < \cdots < A_n$.

   Vamos começar por mostrar que $n \leq 7$. Por absurdo, suponhamos que $n \geq 8$. Como a condição (i) implica que cada A_i é um número par, o número de quadrados cobertos pelos retângulos na decomposição é:

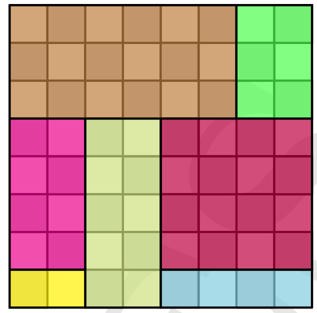
$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n \geq 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72,$$

   o que é impossível uma vez que o tabuleiro só tem 64 quadrados. Portanto temos de ter $n \leq 7$. Além disso, temos necessariamente $A_7 < 24$, pois caso contrário teríamos $A_1 + A_2 + \cdots + A_7 \geq 2+4+6+8+10+12+24 = 66 > 64$. Portanto, para $n = 7$ obtemos as seguintes 5 possibilidades para $\{A_1, A_2, \ldots, A_7\}$: $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 22\}$, $\{2, 4, 6, 8, 10, 14, 20\}$, $\{2, 4, 6, 8, 10, 16, 18\}$, $\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 18\}$ e $\{2, 4, 6, 10, 12, 14, 16\}$.

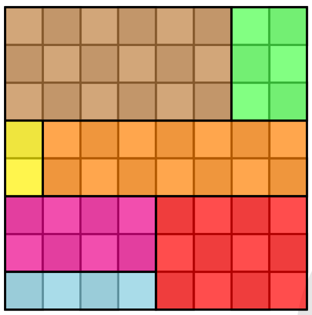
   A primeira sequência não é possível de ser obtida uma vez que não é possível ter um retângulo no tabuleiro com dimensão 1×22 ou 2×11. Cada uma das outras 4 sequências correspondem a decomposições possíveis do tabuleiro, como se ilustra em baixo.



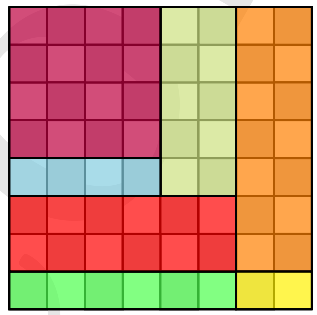
$\{2, 4, 6, 8, 10, 14, 20\}$



$\{2, 4, 6, 8, 10, 16, 18\}$



$\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 18\}$



$\{2, 4, 6, 10, 12, 14, 16\}$

Portanto, o máximo valor de n é 7 e há 4 diferentes decomposições do tabuleiro em 7 retângulos que satisfazem as condições pedidas.