OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XL OPM - 2ª Eliminatória - 12.01.2022 - Categoria B - 10º/12º anos

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Tem-se

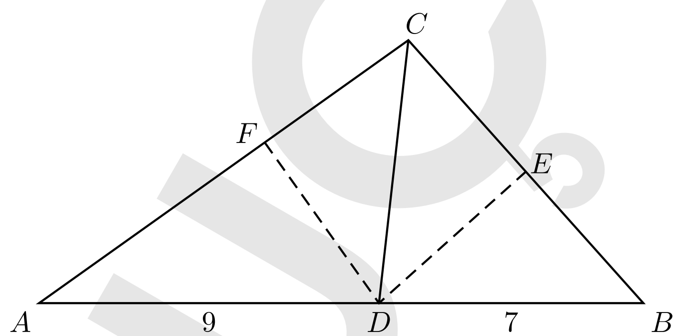
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \text{mínimo}\left\{4\times\frac{2}{3}+1, \frac{2}{3}+2, -2\times\frac{2}{3}+4\right\} = \text{mínimo}\left\{\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3}.$$

Se $x < \frac{2}{3}$, tem-se $x + 2 < \frac{8}{3}$, logo $f(x) < \frac{8}{3}$.
Se $x > \frac{2}{3}$, tem-se $-2x + 4 < \frac{8}{3}$, logo $f(x) < \frac{8}{3}$.
Portanto o valor máximo de $f(x)$ é $\dfrac{8}{3}$.

2. A equação da Mafalda é $a + b = 30 \Leftrightarrow a = 30 - b$, logo há 29 soluções inteiras positivas desta equação: $(30 - b, b)$, com $b = 1, \ldots, 29$.

A equação da Laura é $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow a = 30 + \frac{900}{b-30}$, logo as soluções inteiras positivas da equação são dadas por $\left(30 + \frac{900}{b-30}, b\right)$, onde b é um divisor de 900. Como $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ possui 27 divisores positivos (os números da forma $2^x \times 3^y \times 5^z$, com $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$), então a equação da Laura possui 27 soluções inteiras positivas e, portanto, a Mafalda contou um maior número de soluções.

3. Seja E o ponto médio de $[BC]$ e F o pé da altura em $[AC]$ do triângulo $[ADC]$.



Sendo DE a mediatriz de $[BC]$, o triângulo $[DBC]$ é isósceles e os triângulos $[DBE]$ e $[DCE]$ são congruentes. Como $\dot{C}D$ é a bissetriz de $\angle ACB$, observa-se que os triângulos retângulos $[DEC]$ e $[DFC]$ têm dois ângulos iguais. Pelo critério ALA conclui-se que estes triângulos são congruentes.

Logo $\overline{FC} = \overline{CE} = \overline{EB} = \frac{\overline{BC}}{2}$ e $\overline{DE} = \overline{DF}$.

Por outro lado, considerando h' a altura do triângulo $[ABC]$ relativamente ao lado $[AB]$, tem-se

$$\frac{h'}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{7} \qquad \text{e} \qquad \frac{h'}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AC}}{9}.$$

Como $\overline{DE} = \overline{DF}$ conclui-se que

$$\overline{AC} = \frac{9}{7}\overline{BC}.$$

Observação: a relação $\overline{AC} = \frac{9}{7}\overline{BC}$ *é consequência imediata do Teorema da bissetriz.*

Como $\overline{FC} = \frac{\overline{BC}}{2}$, tem-se $\overline{AF} = \frac{11}{14}\overline{BC}$. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se

$$9^2 - \left(\frac{11}{14}\overline{BC}\right)^2 = \overline{DF}^2 = 7^2 - \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2$$

donde se conclui que $\overline{BC} = \frac{4\times 7}{3}$ e $\overline{DF} = \frac{7}{3}\sqrt{5}$. Portanto,

$$\text{área de } [ADC] = \frac{9}{7}\overline{BC} \times \frac{\overline{DF}}{2} = 14\sqrt{5}.$$

4. Seja n o número de partidos. Cada partido debate com os restantes $n-1$ partidos e descansa pelo menos $n-2$ dias. Logo ao todo tem que haver pelo menos $n-1+n-2 = 2n-3$ dias de debates.

   Por outro lado, os $\dfrac{n(n-1)}{2}$ debates ocupam $\dfrac{n(n-1)}{4}$ dias. Logo $\dfrac{n(n-1)}{4} \geq 2n-3$, ou seja, $n \geq 8$.

   No entanto, para $n = 8$, não é possível calendarizar os debates. Neste caso, haveria $\dfrac{8\times 7}{4} = 14$ dias de debates, e os partidos que tivessem o primeiro debate no dia 2 teriam necessariamente todos os debates nos dias pares; da mesma forma, os partidos que tivessem o primeiro debate no dia 1 teriam necessariamente todos os debates nos dias ímpares. Logo não poderia haver debates entre esses partidos.

   Para $n = 9$, é possível calendarizar os debates com as condições pretendidas, por exemplo, da seguinte forma:

	Debates	
Dia 1	$1 \leftrightarrow 2$	$3 \leftrightarrow 4$
Dia 2	$5 \leftrightarrow 6$	$7 \leftrightarrow 8$
Dia 3	$1 \leftrightarrow 3$	$2 \leftrightarrow 4$
Dia 4	$5 \leftrightarrow 7$	$6 \leftrightarrow 9$
Dia 5	$1 \leftrightarrow 4$	$2 \leftrightarrow 8$
Dia 6	$3 \leftrightarrow 5$	$7 \leftrightarrow 9$
Dia 7	$1 \leftrightarrow 6$	$4 \leftrightarrow 8$
Dia 8	$2 \leftrightarrow 3$	$5 \leftrightarrow 9$
Dia 9	$1 \leftrightarrow 7$	$4 \leftrightarrow 6$
Dia 10	$2 \leftrightarrow 9$	$5 \leftrightarrow 8$
Dia 11	$3 \leftrightarrow 6$	$4 \leftrightarrow 7$
Dia 12	$1 \leftrightarrow 5$	$8 \leftrightarrow 9$
Dia 13	$2 \leftrightarrow 6$	$3 \leftrightarrow 7$
Dia 14	$1 \leftrightarrow 8$	$4 \leftrightarrow 9$
Dia 15	$2 \leftrightarrow 5$	$6 \leftrightarrow 7$
Dia 16	$1 \leftrightarrow 9$	$3 \leftrightarrow 8$
Dia 17	$2 \leftrightarrow 7$	$4 \leftrightarrow 5$
Dia 18	$3 \leftrightarrow 9$	$6 \leftrightarrow 8$

   Portanto, o número mínimo de partidos para o qual é possível calendarizar os debates é 9.

   Observação: Para 9 *partidos, há* $7906 \times 9!$ *formas de calendarizar os debates.*