Olimpíadas Portuguesas de Matemática

XL OPM - 2ª Eliminatória - 12.01.2022 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. (*O livro tem* $50+6=56$ *páginas, logo foi feito com* $56/4=14$ *folhas A4.*)
   (b) Opção E. (*O paralelogramo tem um terço da área do quadrado, ou seja,* 12 *cm*^{2}*.*)
   (c) Opção E. (202101 *e* 202107 *são múltiplos de* 3*;* 202103 *é múltiplo de* 11*;* 2020104 *é par.*)
   (d) Opção D. ($f(\frac{2}{3})=\frac{8}{3}$; *se* $x<\frac{2}{3}$, $x+2<\frac{8}{3}$; *se* $x>\frac{2}{3}$, $-2x+4<\frac{8}{3}$)

2. Como a soma de todos os números das casas é $1+2+\cdots+7+8+10=46$, sabemos que a soma dos números das casas azuis e dos números das casas brancas tem que ser $\frac{46}{2}=23$. Como 23 é ímpar, temos que pintar um número ímpar de casas do lado esquerdo de cada cor. Logo, no lado esquerdo da rua, há uma casa de uma cor e três de outra cor. Vamos supor que uma casa é azul e três são brancas, sendo o outro caso simétrico. Como não há três casas seguidas da mesma cor, temos apenas dois casos a considerar:

   Caso 1: A casa com o número 5 é azul e as restantes são brancas;
   Caso 2: A casa com o número 3 é azul e as restantes são brancas.

   No primeiro caso, a soma dos números das casas do lado direito a pintar de azul deve ser $23-5=18$ e a pintar de branco deve ser $23-(1+3+7)=12$. Como não há três casas seguidas da mesma cor e $8+6+2<18$, a casa número 10 tem que ser pintada de azul. Analogamente, como não há três casas seguidas da mesma cor e $6+4<12$, a casa número 8 tem que ser pintada de branco. É então fácil concluir que as casas números 2 e 6 serão azuis e que a casa número 4 será branca. Logo, no primeiro caso existe apenas uma maneira de pintar as casas.

   No segundo caso, a soma dos números das casas do lado direito a pintar de azul deve ser $23-5=20$ e a pintar de branco deve ser $23-(1+3+7)=10$. Seguindo um raciocínio análogo ao do caso precedente, podemos concluir que a casa número 10 tem que ser pintada de azul. Ficam a faltar pintar as casas com os números $2, 4, 6$, e 8, sendo que a soma dos números das casas pintadas de cada uma das cores deve ser 10. Claramente existem duas formas de fazer isso: ou se pintam as casas com os números 2 e 8 de azul e as restantes de branco, ou se pintam as casas com os números 2 e 8 de branco e as restantes de azul. Como ambas as escolhas respeitam a restrição de não haver três casas seguidas pintadas com a mesma cor, podemos concluir que há duas maneiras possíveis de pintar as casas no segundo caso.

   Logo, o rei pode mandar pintar as casas de $2\times(1+2)=6$ formas distintas.

3. Seja $\alpha=D\hat{A}E$. Como $[ABC]$ e $[DAE]$ são congruentes, temos que $\overline{CB}=\overline{AE}=20$ e $A\hat{B}C=\alpha$. Logo $[ABF]$ é isósceles, o que implica $\overline{AF}=\overline{FB}$. Temos $F\hat{A}C=C\hat{A}B-D\hat{A}E=90-\alpha$ e, como $[ABC]$ é retângulo em A, também $A\hat{C}B=180-C\hat{A}B-A\hat{B}C=90-\alpha$. Logo $[ACF]$ também é isósceles, o que implica $\overline{CF}=\overline{FA}$. Logo $\overline{CF}=\overline{FB}$. Finalmente, temos $20=\overline{CB}=\overline{CF}+\overline{FB}=2\overline{CF}$, logo $\overline{CF}=10$.

4. A equação da Mafalda é $a+b=30 \Leftrightarrow a=30-b$, logo há 29 soluções inteiras positivas desta equação: $(30-b,b)$, com $b=1,\ldots,29$.

   A equação da Laura é $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{30} \Leftrightarrow a=30+\frac{900}{b-30}$, logo as soluções inteiras positivas da equação são dadas por $\left(30+\frac{900}{b-30},b\right)$, onde b é um divisor de 900. Como $900=2^2\times3^2\times5^2$ possui 27 divisores positivos (os números da forma $2^x\times3^y\times5^z$, com $x,y,z\in\{0,1,2\}$), então a equação da Laura possui 27 soluções inteiras positivas e, portanto, a Mafalda contou um maior número de soluções.