OLIMPÍADAS NACIONAIS DE MATEMÁTICA

XII ONM - Categoria B ($10^{\underline{o}}$, $11^{\underline{o}}$, $12^{\underline{o}}$ anos)
Final Nacional 1994 - $1^{\underline{o}}$ dia

6/5/94

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

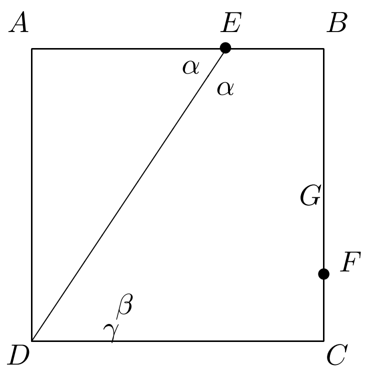
---

1. Seja n a solução que procuramos e $p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ a sua factorização em números primos. É claro que o número de divisores de n é igual a $(\alpha_1 + 1) \times \ldots \times (\alpha_k + 1)$. Então temos

$$(\alpha_1 + 1) \times \ldots \times (\alpha_k + 1) = 1994 = 2 \times 997$$

que tem como soluções $k = 1$ e $\alpha_1 = 1993$ ou $k = 2, \alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 996$ ou $k = 2, \alpha_1 = 996$ e $\alpha_2 = 1$. Basta-nos portanto considerar números da forma p_1^{1993} e $p_1 p_2^{996}$. Os menores números desta forma são obviamente 2^{1993} e 3×2^{996}. Como $3 \times 2^{996} < 2^{1993}$ então $n = 3 \times 2^{996}$.

2. Na figura, o triângulo $[DEG]$ é geometricamente igual ao triângulo $[ADE]$, pois os ângulos adjacentes ao lado comum DE são iguais.



Logo $\overline{AE} = \overline{EG}$. Por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{DG}^2 + \overline{GF}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CF}^2$, donde $\overline{FC} = \overline{GF}$, o que prova a relação pretendida.

3.

$$\begin{aligned}
\underbrace{11\cdots11}_{2n} - \underbrace{22\cdots22}_{n} &= \underbrace{11\cdots11}_{n}\underbrace{00\cdots00}_{n} - \underbrace{11\cdots11}_{n} \\
&= \underbrace{11\cdots11}_{n} \times 10^n - \underbrace{11\cdots11}_{n} \\
&= \underbrace{11\cdots11}_{n} \times \underbrace{99\cdots99}_{n} \\
&= 9 \times (\underbrace{11\cdots11}_{n})^2 \\
&= 3^2 \times (\underbrace{11\cdots11}_{n})^2 = (\underbrace{33\cdots33}_{n})^2.
\end{aligned}$$