SUGESTÕES para a resolução dos problemas

4. Os 27 cubos obtidos têm no total 6×27 faces, das quais 6×9 foram pintadas (9 por cada uma das faces do cubo inicial). Temos assim, $6 \times 27 - 6 \times 9 = 108$ faces que não foram pintadas, e cuja área total é de $108 \times 9\,cm^2 = 972\,cm^2$.

5. Comecemos por pensar num problema de certo modo "dual" daquele que se pretende resolver:

   Suponhamos que temos um ponto P fixo na circunferência C e que pretendemos determinar a posição de um ponto Q, que varia numa outra circunferência de centro O, contida no interior de C, de modo que o ângulo $\widehat{OPQ}$ seja máximo.

   Neste caso, é claro que o ângulo $\widehat{OPQ}$ é máximo quando PQ é tangente à circunferência mais pequena, isto é, quando o ângulo $\widehat{OQP}$ mede $90°$.

   Consideremos então o problema dado no enunciado.

   Estando agora Q fixo no interior de C, o ponto P da circunferência C tal que o ângulo $\widehat{OPQ}$ é máximo deve ser posicionado de modo a que o ângulo $\widehat{OQP}$ seja recto. De facto, se escolhessemos outro ponto – digamos P' – na circunferência C, já sabemos que o maior ângulo $\widehat{OP'Q'}$ possível, para Q' a variar na circunferência de centro O e raio OQ, se obtém quando $\widehat{OQ'P'}$ é de $90°$; consequentemente, o ângulo $\widehat{OP'Q}$ é inferior ao ângulo $\widehat{OP'Q'}$ máximo. Como, para P, P' e Q' escolhidos acima, os triângulos $[OPQ]$ e $[OP'Q']$ são geometricamente iguais, então $\widehat{OPQ} = \widehat{OP'Q'}$ e, portanto, o ângulo $\widehat{OP'Q}$ é inferior ao ângulo $\widehat{OPQ}$.

6. Notemos duas propriedades:

   - o interruptor da lâmpada k só é accionado nos passos $1, 2, \ldots, k$, permanecendo inalterado a partir daí;
   - o interruptor da lâmpada k é accionado no passo n $(n \leq k)$ se e só se k for da forma $n \times p$ com p natural, isto é, se e só se n for um divisor de k.

   Assim o interruptor da lâmpada k é accionado em todos os passos n que dividem k (e só nesses). Para que a lâmpada fique acesa o seu interruptor terá que ser accionado um número ímpar de vezes. Logo as lâmpadas que ficam acesas são as correspondentes aos números que têm um número ímpar de divisores. Mas:

   Um natural tem um número ímpar de divisores se e só se é um quadrado perfeito. De facto, agrupando os divisores de um número natural dois a dois, de modo a que os números em cada par multiplicados dêem o natural inicial, é claro que existe um número ímpar de divisores se e só se num desses pares os dois números são iguais, isto é, se e só se o natural inicial é um quadrado perfeito.

   Então o número de lâmpadas que ficam acesas é igual ao número de quadrados perfeitos inferiores ou iguais a 1000. Como $31 < \sqrt{1000} < 32$ teremos 31 lâmpadas acesas.

   Observação: É também possível concluir, da fórmula utilizada no problema 3 que nos dá o número de divisores de um natural em função da sua factorização em números primos, que um natural possui um número ímpar de divisores se e só se é um quadrado perfeito. Com efeito, se $a = b^2$ e $p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_t^{\alpha_t}$ é a factorização de b em números primos então $p_1^{2\alpha_1} \times \ldots \times p_t^{2\alpha_t}$ é a factorização de a em números primos logo o número de divisores de a é igual a $(2\alpha_1 + 1) \times \ldots \times (2\alpha_t + 1)$ que é um número ímpar. Reciprocamente, sendo $a = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_t^{\alpha_t}$ um número com um número ímpar de divisores, então $(\alpha_1 + 1) \times \ldots \times (\alpha_t + 1)$ é ímpar e, necessariamente, α_i é da forma $2\beta_i$ para $i = 1, \ldots, t$. Portanto $a = (p_1^{\beta_1} \times \ldots \times p_t^{\beta_t})^2$.