SUGESTÕES para a resolução dos problemas

---

1. O Sr. Dinheiro deu sucessivamente

$$1\$00, 2\$00, 3\$00, \cdots, n\$00$$

podendo, eventualmente, ter sobrado r escudos ($r \leq n$). Então

$$1+2+3+\cdots+n \leq 1000 < 1+2+3+\cdots+(n+1)$$

i.e.

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq 1000 < \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Teremos então que

$$n+1 \approx \sqrt{2000} = 10\sqrt{20} \approx 10 \times 4,5 = 45.$$

Tentemos $n = 44$:

$$1+2+3+\cdots+44 = \frac{44 \times 45}{2} = 990 < 1000 < 1+2+3+\cdots+45 = 1035.$$

Portanto o Sr. Dinheiro deu, por 44 vezes, dinheiro, sobrando 10\$00. Como $44 = (14 \times 3) + 2$ então o Sr. Dinheiro deu dinheiro ao Bernardo, por quinze vezes. Em conclusão, o Bernardo recebeu

$$2+5+8+\cdots+44 = 15(\frac{2+44}{2}) = 345\$00.$$

2. Para baterem o recorde um deles deverá começar de bicicleta, largá-la num certo ponto e percorrer o resto da distância a pé. O outro começa a pé, pega na bicicleta onde ela foi abandonada e termina a pedalar. Para que gastem o menor tempo possível, devem combinar a sua estratégia de modo a que cheguem ao mesmo tempo.

Suponhamos então que o primeiro ciclista é o Aníbal e que ele percorre de bicicleta uma distância d. Então:

$$\text{Tempo total do percurso do Aníbal} = \frac{d}{50} + \frac{50-d}{20},$$

$$\text{Tempo total do percurso do Mário} = \frac{d}{10} + \frac{50-d}{50}.$$

Igualando estas expressões (visto que eles demoram o mesmo tempo) obtem-se $d = \frac{150}{11}Km$. Logo, o tempo de prova é igual a

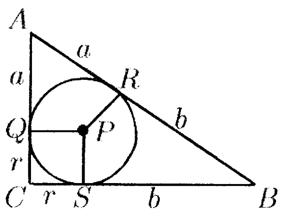
$$\frac{15}{11} + 1 - \frac{3}{11} = \frac{23}{11}h.$$

O recorde é nosso!

SUGESTÕES para a resolução dos problemas

---

3. Consideremos o triângulo $[ABC]$, representado na figura, sendo P o centro do círculo, de raio r, nele inscrito. Traçando as perpendiculares aos lados, que passam por P, obtemos os pontos Q, R, S. Os triângulos $[AQP]$ e $[ARP]$ são geometricamente iguais, assim como os triângulos $[BSP]$ e $[BRP]$ (lembrar que P é a intersecção das bissectrizes dos ângulos de $[ABC]$).



Assim:

$$\overline{AQ} = \overline{AR} = a \qquad \overline{QC} = \overline{CS} = r \qquad \overline{BR} = \overline{BS} = b.$$

Temos então, pelo Teorema de Pitágoras:

$$(a+b)^2 = (a+r)^2 + (b+r)^2 \Leftrightarrow ab = r^2 + (a+b)r.$$

Finalmente, a área do triângulo é igual a :

$$\frac{(a+r)(b+r)}{2} = \frac{ab + (a+b)r + r^2}{2} = \frac{2ab}{2} = ab.$$

4. Designando por S a soma dos 10 números inteiros (que denotaremos por $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$), temos que:

$$S - a_1 = 82, S - a_2 = 83, S - a_3 = 84, S - a_4 = 85, S - a_5 = 87,$$
$$S - a_6 = 89, S - a_7 = 90, S - a_8 = 91, S - a_9 = 92.$$

A diferença $S - a_{10}$ será igual a um dos resultados dados. Determinemos em seguida qual é esse resultado. Das equações anteriores concluímos que:

$$a_1 = 1 + a_2, a_2 = 1 + a_3, a_3 = 1 + a_4, a_4 = 2 + a_5, a_5 = 2 + a_6, a_6 = 1 + a_7, a_7 = 1 + a_8, a_8 = 1 + a_9$$

ou ainda

$$a_8 = 1 + a_9, a_7 = 2 + a_9, a_6 = 3 + a_9, a_5 = 5 + a_9, a_4 = 7 + a_9, a_3 = 8 + a_9, a_2 = 9 + a_9, a_1 = 10 + a_9.$$

Assim, $S - a_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 9a_9 + 45$ e como $S - a_{10}$ é igual a um dos resultados $82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91, 92$, temos necessariamente $a_9 = 5$ e $S - a_{10} = 90$, o que permite ainda escrever $a_7 = a_{10}$ (pois $S - a_7 = 90$). Assim, obtemos $a_9 = 5, a_8 = 6, a_7 = 7, a_6 = 8, a_5 = 10, a_4 = 12, a_3 = 13, a_2 = 14, a_1 = 15$ e $a_{10} = 7$. Os inteiros em causa são, portanto: 5,6,7,7,8,10,12,13,14,15.