XLVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (outubro de 2022)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

A *Esperança Pitagórica* é uma fórmula criada por *Bill James* (historiador, estatístico e especialista em beisebol) para estimar a porcentagem de jogos que uma equipe de beisebol deveria vencer em uma temporada baseado no número de corridas que a equipe fez e quantas ela sofreu (você não precisa entender de beisebol para resolver o problema, nós mesmos da OPM não entendemos ☺ – viva a Wikipédia!):

$$\text{\% de Vitórias} = \frac{(\text{corridas feitas})^2}{(\text{corridas feitas})^2 + (\text{corridas sofridas})^2}$$

O número é fruto da semelhança do denominador da fórmula com o Teorema de Pitágoras.
Por exemplo, em 2012, o New York Yankees fez 804 corridas e sofreu 668 corridas. Então, de acordo com a fórmula de Bill James:

$$\text{\% de Vitórias} = \frac{804^2}{804^2 + 668^2} = 0{,}5916\ldots$$

Como são 162 jogos na temporada regular, a fórmula previa $0{,}5916\ldots \cdot 162 \cong 96$ vitórias. De fato, foram 95 vitórias. Nada mau…

a) O New York Mets (o outro time da cidade de Nova Iorque) fez 636 e sofreu 668 corridas em 2021. Aplicando a fórmula da Esperança Pitagórica, qual o número de vitórias esperado para a temporada? Curiosidade: a fórmula acerta em cima. Muito bom…

b) Qual deve ser a razão entre o número de corridas feitas e o número de corridas sofridas para a fórmula prever 64% de vitórias em uma temporada?

Analisando diversos conjuntos de dados, percebe-se que a fórmula tem um erro recorrente. Ela costuma errar por entre uma e três partidas. Para corrigir este erro, muitos estatísticos fizeram testes para determinar o expoente ideal.
A proposta mais conhecida é a fórmula de *Pythagenport* criada por *Clay Davenport* (cofundador do *Baseball Prospectus*):

$$\text{Expoente} = 1{,}50 \cdot \log_{10}\left(\frac{\text{corridas feitas} + \text{corridas sofridas}}{\text{jogos}}\right) + 0{,}45$$

Por exemplo, voltando ao Yankees de 2012:

$$\text{Expoente} = 1{,}50 \cdot \log_{10}\left(\frac{804 + 668}{162}\right) + 0{,}45 \cong 1{,}89$$

E, portanto:

$$\text{\% de Vitórias} = \frac{804^{1{,}89}}{804^{1{,}89} + 668^{1{,}89}} = 0{,}586\ldots$$

Novamente, como são 162 jogos na temporada regular, a fórmula previa $0{,}586\ldots \cdot 162 \cong 95$. Em cheio!
A tabela a seguir mostra o número médio de corridas feitas por jogo por cada time nas últimas dez temporadas da *MLB* (*Major League Baseball* – a principal liga profissional de Beisebol dos EUA).

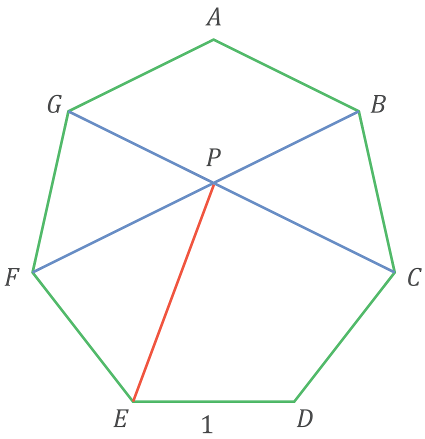
Ano	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Média	4,17	4,07	4,25	4,48	4,65	4,45	4,83	4,65	4,53	4,30

c) Suponha que tivéssemos que utilizar um único expoente para todos os times da MLB em 2021. Considerando a tabela, calcule tal expoente.
Dica: você pode querer adotar neste item que $\log_{10} 3 \cong 0{,}48$.

d) Quando especialistas sugerem trocar o expoente 2 por outro, os valores sugeridos sempre são menores. O valor $1{,}83$, por exemplo, é o utilizado pelo excelente site *baseball-reference.com*
Considerando, mais uma vez, a tabela dada, justifique o porquê de os valores utilizados serem menores do que 2.

PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

Um *heptágono regular* é um polígono de 7 lados congruentes e ângulos internos congruentes. Ele aparece em uma edição antiga da moeda de 25 centavos de real:



Considere um heptágono regular $ABCDEFG$ de lado 1. As diagonais $\overline{CG}$ e $\overline{BF}$ se cortam no ponto P.

a) Explique por que os ângulos $A\hat{B}F$ e $G\hat{F}B$ possuem mesmas medidas e prove que o quadrilátero $ABFG$ é um trapézio.

b) Mostre que $ABPG$ é um losango (isto é, um quadrilátero com seus quatro lados congruentes).

c) Calcule as medidas dos ângulos $G\hat{F}B$ e $G\hat{P}F$, em radianos.

d) Mostre que $FP = 2\cos\frac{2\pi}{7}$.

e) Prove que $PE^2 = 1 - 8\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

f) Mostre que $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$ e conclua que $PE = \sqrt{2}$.

Dica: $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{7}}$ *e os fatos listados a seguir.*

- *Um polígono regular com n lados tem ângulos internos de medida* $\frac{(n-2)\pi}{n}$ *radianos;*
- *Em um triângulo com lados* a, b, c *e ângulo* θ *entre* a *e* b*, vale a lei dos cossenos:* $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$.
- $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\mathrm{sen}(\pi + x) = -\mathrm{sen}\, x$
- $2\cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$
- $2\,\mathrm{sen}\, x \cos x = \mathrm{sen}\, 2x$

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

O *Farkle* é um jogo de dados para duas ou mais pessoas. Em cada rodada todas jogam. São utilizados seis dados e o jogo acaba na rodada em que alguém atingir 10.000 pontos. Uma vez que alguém termine sua vez com 10.000 pontos, as demais pessoas que não jogaram ainda na rodada têm uma última chance de pontuar. Vence quem tiver mais pontos.
Os pontos são atribuídos seguindo a tabela a seguir.

Tipo de Pontuação	Pontos
⚀'s (até um par)	100 para cada ⚀ obtido
⚄'s (até um par)	50 para cada ⚄ obtido
Terno de ⚀ (⚀⚀⚀)	300
Terno de x's (três x's, $x \neq$ ⚀)	$100 \cdot x$
Quadra (quatro números iguais)	1000
Quina (cinco números iguais)	2000
Sena (seis números iguais)	3000
Sequência (⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅)	1500
Três pares	1500
Quadra e par	1500
Duas ternas	2500

Cada jogador começa sua vez jogando todos os seis dados. Ele deve então retirar qualquer subconjunto de dados que valham alguma pontuação e acrescentar tal pontuação ao seu total na rodada. Os dados não envolvidos na pontuação podem ser lançados novamente. E assim sucessivamente.
Se não há pontuação possível, dizemos que ele lançou um *Farkle* e a rodada acaba para ele. Neste caso, ele perde todos os pontos obtidos na rodada, ou seja, sua pontuação na rodada é 0 (zero). Caso contrário, ao terminar de utilizar todos os dados em pontuações, ele acumula os pontos obtidos ao seu total no jogo.
O jogador tem a opção de parar em qualquer momento em seus lançamentos e acrescentar os pontos obtidos até então na rodada ao seu total no jogo.[1]

Complicado? Vejamos um exemplo.
Esmeralda começa sua primeira rodada lançando ⚃ ⚃ ⚂ ⚄ ⚁ ⚃. Esse resultado produz quatro dados que levam a pontuações: um terno de ⚃'s e um ⚄. Assim, Esmeralda tem as seguintes opções para continuar sua rodada:

- Retirar o terno de ⚃'s para obter $100 \cdot 4 = 400$ pontos e parar;
- Retirar o terno de ⚃'s para obter $100 \cdot 4 = 400$ pontos e lançar os outros três dados;
- Retirar o ⚄ para obter 50 pontos e parar;
- Retirar o ⚄ para obter 50 pontos e lançar os outros cinco dados;
- Retirar os quatro dados ⚃ ⚃ ⚃ ⚄ para obter 450 pontos e parar;
- Retirar os quatro dados ⚃ ⚃ ⚃ ⚄ para obter 450 pontos e lançar os outros dois dados.

Esmeralda decide pela última opção, que é retirar os quatro dados ⚃ ⚃ ⚃ ⚄ e lança os dois dados restantes. Ela obtém ⚃ ⚅. Não há pontuação possível, ou seja, Esmeralda lançou um Farkle. Com isso, ela perde os 450 pontos e sua rodada termina. Esmeralda obtém 0 ponto nessa rodada.

a) Seja p_n a probabilidade de lançar um Farkle com n dados. Calcule p_1, p_2, p_3 e p_6.
Na sua vez, Jade decide jogar seus dois dados restantes mais uma vez e colocar em risco os T pontos que obteve na rodada, e em seguida terminar sua rodada, independentemente do resultado.
b) A tabela a seguir exibe os possíveis resultados para o lançamento de dois dados de Jade. Preencha a tabela com as possíveis pontuações finais de Jade, em função de T. Preenchemos um valor para você: se Jade obtiver dois ⚀ 's, sua pontuação final da rodada é $T + 200$.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	$T + 200$					
⚁						
⚂						
⚃						
⚄						
⚅						

c) Obtenha, em termos de T, o valor esperado para o número de pontos obtidos por Jade na rodada após o lançamento dos dois dados.
Neste item você talvez queira utilizar a fórmula do valor esperado.
Seja X o número total de pontos acumulados na rodada após lançar os dois dados restantes, o valor esperado $E(X)$ é dado pelo somatório dos produtos das pontuações possíveis de serem atingidas pelas probabilidades daqueles resultados ocorrerem. Por exemplo, se forem obtidos dois ⚀'s, Jade ganha mais 200 pontos. E a probabilidade de se obter dois ⚀'s é $\frac{1}{36}$. Logo um dos termos deste somatório é $(T + 200) \cdot \frac{1}{36}$.
d) Determine o valor de T para o qual $E(X) = T$.
e) Qual conselho você daria para um jogador com T pontos que está pensando em jogar mais uma vez seus últimos dois dados e terminar sua rodada?

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos
Além de resolver problemas, a capacidade de elaborar problemas novos, as chamadas *conjecturas*, cuja busca da resolução leve ao desenvolvimento da Ciência é uma das habilidades mais importantes que um matemático pode possuir. Um dos maiores elaboradores de conjecturas que propiciaram a criação de novas áreas e técnicas da Matemática atual foi o húngaro *Paul Erdös* (26/03/1913 – 20/09/1996). Trataremos neste problema de uma de suas conjecturas envolvendo uma *equação Diofantina*: equações que procuramos soluções inteiras.

[1] Existe uma regra que envolve uma pontuação mínima de 500 pontos para começar a pontuação, mas ela não será relevante nesse problema.

Erdös propôs a questão de se a equação Diofantina $x^x y^y = z^z$ possuía soluções além das triviais $x = 1$ e $y = z$; $y = 1$ e $x = z$. *Chao Ko* encontrou infinitas soluções sendo uma delas (aquela com menores valores para as variáveis) com $x = 12^6$ e $y = 6^8$.
a) Determine a fatoração em primos de z para x e y dados acima.

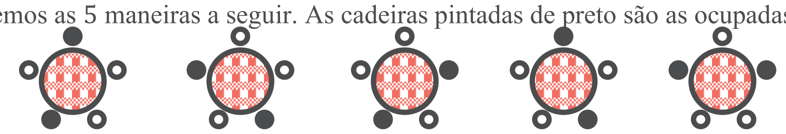
Claude Anderson conjecturou que a equação Diofantina $w^w x^x y^y = z^z$ não possuía soluções com $1 < w < x < y < z$, mas *Chao Ko* desta vez em colaboração com *Sun Qi* descobriu uma infinidade de contraexemplos para a generalização da conjectura para um número qualquer de variáveis, ou seja, para a equação ${x_1}^{x_1}{x_2}^{x_2}{x_3}^{x_3}\cdot \dots \cdot {x_k}^{x_k} = z^z$ em que $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ e z são inteiros positivos.
b) Sabendo que $w = 3^{12}2^6$, $x = 3^{13}2^5$ e $y = 3^{14}2^4$ determine z na equação $w^w x^x y^y = z^z$. Por que esta solução mostra que a conjectura de Anderson é falsa?

No página 266 do maravilhoso livro *Unsolved Problems in Number Theory* de *Richard K. Guy* (3ª Edição, 2010), as soluções de Chao Ko e Sun Ki são apresentadas como segue:

$$x_1 = k^{k^n(k^{n+1}-2n-k)+2n}(k^n-1)^{2(k^n-1)}$$
$$x_2 = k^{k^n(k^{n+1}-2n-k)}(k^n-1)^{2(k^n-1)+2}$$
$$x_3 = \cdots = x_k = k^{k^n(k^{n+1}-2n-k)+n}(k^n-1)^{2(k^n-1)+1}$$
$$z = k^{k^n(k^{n+1}-2n-k)+n+1}$$

c) Alguma coisa parece estranha com o z, não é? De fato, falta um pedaço na fórmula do z (acontece com os melhores autores!): falta um fator da forma $(k^n-1)^M$, ou seja, o valor correto de z é $z = k^{k^n(k^{n+1}-2n-k)+n+1}(k^n-1)^M$, para algum M inteiro positivo. Encontre a fórmula para M. *Não se esqueça de que você deve justificar as suas respostas.*
d) Mostre que existem infinitos contraexemplos para a conjectura de Anderson.

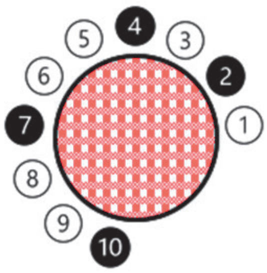
PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos
Suponha que tenhamos uma mesa redonda com n lugares sem pessoas adjacentes e sem a possibilidade de colocar mais pessoas a não ser que duas fiquem adjacentes. Chamamos tais distribuições de *mesas cheias*.
Por exemplo, para $n = 5$, temos as 5 maneiras a seguir. As cadeiras pintadas de preto são as ocupadas.

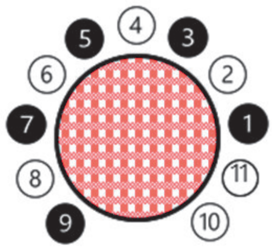


Observe que, se colocarmos apenas uma pessoa na mesa, sempre é possível acrescentar mais uma e, portanto, a condição do problema não é satisfeita. Também podemos verificar que é impossível colocar três pessoas na mesa dentro destas condições.
Seja a_n o número de mesas cheias de n lugares. Acabamos de mostrar que $a_5 = 5$. Temos ainda que (é fácil verificar!): $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ e $a_4 = 2$ (isso mesmo, não é 4).
a) Calcule a_6 (*dica: não dá* 6), a_7, a_8 e a_9 e complete a tabela a seguir na sua folha de respostas. *Não se esqueça que você deve justificar suas respostas.*

a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
2	3	2	5				

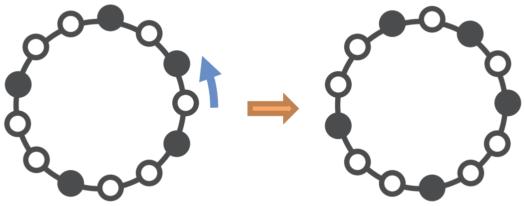
Vamos provar nos próximos dois itens que a sequência a_n satisfaz uma recursão da forma:
$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3}$$
em que $n \geq 5$ e c_1, c_2 e c_3 são constantes.
b) Calcule c_1, c_2 e c_3.
c) Prove que a_n satisfaz a recursão $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3}$, para $n \geq 5$, com as constantes obtidas no item anterior.
(Super) Dica: considere que as cadeiras têm uma numeração fixada como as mostradas abaixo para mesas cheias com, respectivamente, $n = 10$ *e* $n = 11$ *cadeiras.*
Observe que é possível, a partir dessas distribuições que satisfazem as condições do problema, obter uma regra que identifique de maneira única mesas cheias que satisfazem o problema para $n = 13$ *cadeiras.*





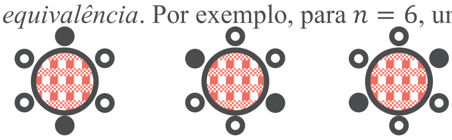
d) Calcule a_{13} e a_{17}.
Se você não errou nenhuma conta *(#ficaadica)*, pode observar que sempre que temos um número primo p, então a_p é um múltiplo de p. Iremos concluir esta questão demonstrando tal fato.

Considere as cadeiras numeradas como vimos na figura acima. Dizemos que duas maneiras de ocupar as mesas nas condições do problema são *rotacionalmente equivalentes* se uma pode ser obtida a partir da outra por uma rotação. Por exemplo, as duas maneiras a seguir são rotacionalmente equivalentes.



Consideramos que toda mesa cheia é rotacionalmente equivalente a ela mesma. É fácil ver que se uma mesa cheia é rotacionalmente equivalente a uma segunda mesa cheia, também é válido que a segunda é equivalente à primeira. Finalmente, se uma mesa cheia é equivalente a uma segunda e esta segunda é equivalente a uma terceira, então a primeira é rotacionalmente equivalente à terceira.

Com estes três fatos pode-se demonstrar – você não precisará fazer isso agora – que o conjunto formado pelas mesas cheias com n lugares é particionado (isto é, dividido em subconjuntos disjuntos) por conjuntos de mesas cheias rotacionalmente equivalentes. Tais conjuntos são chamados de *classes de equivalência*. Por exemplo, para $n = 6$, uma das classes de equivalência é:



Observe que tal classe de equivalência contém três mesas cheias distintas com 6 lugares.

e) Apresente todas as classes de equivalência das mesas cheias com 8 lugares.

f) Prove que se alguma classe de equivalência do conjunto das mesas cheias com p lugares, p primo, tem k elementos, $1 \leq k < p$, então existe uma mesa cheia que é rotacionalmente equivalente a ela rotacionada em apenas um lugar, ou seja, as posições de cadeiras ocupadas não se alteram se a cadeira 1 é colocada na posição da cadeira 2; a cadeira 2 é colocada na posição da cadeira 3; a 3 na da 4; ...; a da $p-1$ na da p e a p na da 1.

g) Conclua que para todo primo p, a_p é um múltiplo de p.

Curiosidade: não vale a volta, ou seja, se a_n é um múltiplo de n, não podemos concluir que n é primo. Números compostos n tais que a_n é um múltiplo de n são chamados de *pseudoprimos de Perrin*. Tais números são raros, mas são infinitos. Os menores pseudoprimos de Perrin são 271441, 904631, 16532714, 24658561, 27422714, 27664033. Para saber mais, veja:
https://oeis.org/A013998
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X10000120?via%3Dihub

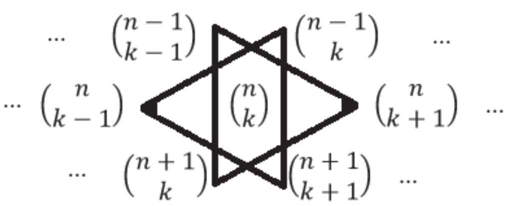
PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

O Triângulo de Pascal é uma forma muito famosa e útil de apresentar os números binomiais $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. A partir de $n = 0$, apresentamos na linha n os binomiais $\binom{n}{k}$ para $0 \leq k \leq n$. A seguir temos as cinco primeiras linhas do Triângulo de Pascal.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\dots$$

Nesse problema veremos algumas propriedades dos números binomiais envolvendo suas posições no Triângulo de Pascal.

Para inteiros positivos $1 \leq k < n$ considere alguns termos em três linhas consecutivas do Triângulo de Pascal. Vamos considerar um "triângulo" com vértices em $B_1 = \binom{n-1}{k-1}$, $B_3 = \binom{n}{k+1}$ e $B_5 = \binom{n+1}{k}$ e outro com vértices em $B_2 = \binom{n-1}{k}$, $B_4 = \binom{n+1}{k+1}$ e $B_6 = \binom{n}{k-1}$. Os dois triângulos juntos formam uma estrela de seis pontas similar à famosa estrela de Davi.



a) Prove que $B_1 \cdot B_3 \cdot B_5 = B_2 \cdot B_4 \cdot B_6$.

Nos próximos itens vamos provar o *Teorema de Gould*. Ele diz que o máximo divisor comum (mdc) dos três "vértices" de um triângulo é igual ao mdc dos vértices do outro, ou seja:

$$\text{mdc}(B_1, B_3, B_5) = \text{mdc}(B_2, B_4, B_6)$$

Para cada primo positivo p chamaremos de $v_p(n)$ o expoente de p na fatoração do inteiro positivo n como produto de potências de primos. Por exemplo, $v_2(20) = 2$, $v_2(27) = 0$ e $v_3(27) = 3$. Observe que nos inteiros positivos $m = n \Leftrightarrow v_p(m) = v_p(n)$ para todo primo p.

Para o próximo item considere um primo p fixado.
b) Prove que se $v_p(x) < v_p(y)$, então $v_p(x + y) = v_p(x)$. Prove também que se $v_p(x) = v_p(y)$, então $v_p(x + y) \geq v_p(x)$.

Uma consequência imediata dos resultados do item b é que entre os três valores $v_p(x)$, $v_p(y)$ e $v_p(x + y)$ o valor mínimo acontece duas ou três vezes. Não existe um deles que é estritamente menor que os outros dois.

Seja $B_0 = \binom{n}{k}$ e, para cada $i = 0,1, \ldots ,6$, seja e_i o valor de $v_p(B_i)$.
c) Explique por que $e_1 + e_3 + e_5 = e_2 + e_4 + e_6$.

d) Suponha que $e_1 < \text{mín}\,(e_2, e_4, e_6)$. Prove que $e_1 = e_0$.
e) Ainda de acordo com a hipótese do item d, prove que $e_5 = e_3 = e_1 = e_0$.

f) Prove que o resultado do item e gera uma contradição com o resultado do item c. Ou seja, demonstre que $e_1 \geq \text{mín}\,(e_2, e_4, e_6)$.

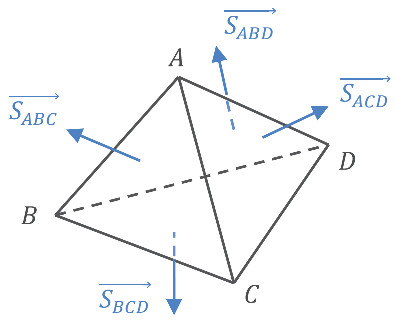
g) Conclua a demonstração do Teorema de Gould, ou seja, prove que vale a igualdades dos mdcs:

$$\text{mdc}(B_1, B_3, B_5) = \text{mdc}(B_2, B_4, B_6)$$

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos
Uma maneira de descrever área que é bastante utilizada em cálculo é utilizar *vetores*. De modo informal, um vetor é uma flecha que pode ser transladada livremente. Todo vetor tem direção, sentido e comprimento. Os vetores possuem operações próprias. Por exemplo, para somar $\vec{x}$ e $\vec{y}$ devemos colocar o começo de um no final do outro e o vetor soma $\vec{x} + \vec{y}$ vai do começo do primeiro até o final do segundo como mostrado na figura a seguir.

Existem outras operações importantes com vetores como veremos neste problema.

No caso particular de áreas de faces de sólidos, podemos definir o *vetor área* como o vetor que tem comprimento numericamente igual à área da face, direção perpendicular à face e sentido apontando para o exterior do sólido. A seguir, representamos um tetraedro $ABCD$ e seus quatro vetores de área $\vec{v_d} = \overrightarrow{S_{ABC}}$, $\vec{v_c} = \overrightarrow{S_{ABD}}$, $\vec{v_b} = \overrightarrow{S_{ACD}}$ e $\vec{v_a} = \overrightarrow{S_{BCD}}$. Os comprimentos dos vetores são as áreas das faces ABC, ABD, ACD e BCD, respectivamente.



Tetraedros têm uma propriedade bastante interessante:

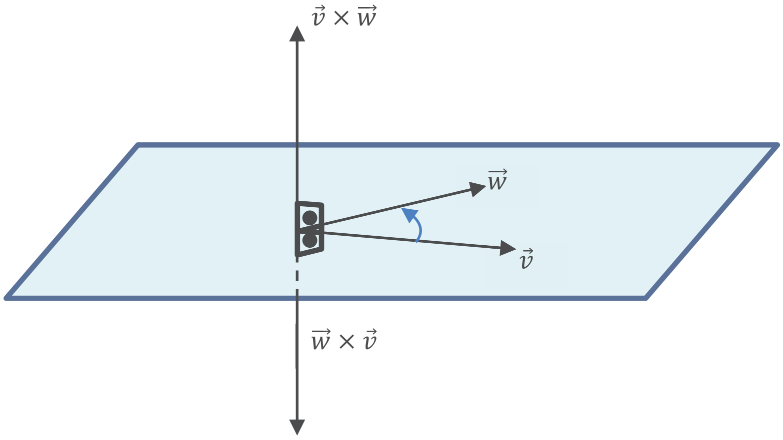
Propriedade T*: Sejam $\vec{v_a}, \vec{v_b}, \vec{v_c}, \vec{v_d}$ vetores de área de comprimentos a, b, c, d, respectivamente, não todos no mesmo plano. Então existe um tetraedro com exatamente esses 4 vetores de área se, e somente se, $\vec{v_a} + \vec{v_b} + \vec{v_c} + \vec{v_d} = \vec{0}$ (vetor nulo que tem comprimento zero). Além disso, o tetraedro é único a menos de translação.*

Vamos demonstrar essa propriedade e usá-la para provar um resultado geométrico bem bacana. Qual? Continue a ler!

A demonstração da propriedade T exige dois passos: um é provar que, em cada tetraedro a soma de seus vetores de área é o vetor nulo (ou seja, $\vec{v_a} + \vec{v_b} + \vec{v_c} + \vec{v_d} = \vec{0}$) e o outro é provar que, dados os vetores de área $\vec{v_a}, \vec{v_b}, \vec{v_c}, \vec{v_d}$ não coplanares com $\vec{v_a} + \vec{v_b} + \vec{v_c} + \vec{v_d} = \vec{0}$, é possível construir um único tetraedro com esses vetores de área.

Para a primeira tarefa, vamos usar o conceito de *produto vetorial*, que calcula essencialmente o vetor área: o produto vetorial de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, denotado por $\vec{v} \times \vec{w}$, é o vetor perpendicular ao plano determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e comprimento igual à área do paralelogramo determinado por $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Note que, pela nossa definição, se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ estão na mesma direção, a área do paralelogramo relevante é zero, e o produto vetorial é o vetor nulo.

O sentido é determinado pela ordem entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Imagine os dois vetores no plano horizontal; se ao girar de $\vec{v}$ para $\vec{w}$ vamos no sentido anti-horário, então $\vec{v} \times \vec{w}$ aponta para cima; caso contrário, então $\vec{v} \times \vec{w}$ aponta para baixo. Por isso, se trocarmos a ordem dos vetores, o sentido do produto vetorial é trocado, ou seja, $\vec{w} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{w}$.



Assim, no tetraedro $ABCD$ na figura, $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{S_{BCD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{v_b} = \overrightarrow{S_{ACD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$, e assim por diante. Note que a ordem em que os vetores são colocados é relevante.

O produto vetorial tem as seguintes propriedades:

- $\vec{v} \times (-\vec{w}) = -\vec{v} \times \vec{w}$
- $\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u}$; em particular, $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{PQ} \times \left(\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}\right) = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{YZ}$.
- $(\vec{w} + \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}$

a) Mostre que no tetraedro $ABCD$, $\overrightarrow{v_a} + \overrightarrow{v_b} + \overrightarrow{v_c} + \overrightarrow{v_d} = \vec{0}$, ou seja, $\overrightarrow{S_{BCD}} + \overrightarrow{S_{ACD}} + \overrightarrow{S_{ABD}} + \overrightarrow{S_{ABC}} = \vec{0}$.

A segunda tarefa, que é mostrar a existência de um único tetraedro, usa vetores e… matrizes! Antes, começamos com um novo ingrediente, que é o conceito de *produto escalar* entre dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, denotado por $\vec{v} \cdot \vec{w}$. O produto escalar é igual a $vw\cos\theta$, em que v e w são os comprimentos de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e θ é o ângulo entre esses dois vetores. Observe que, como $\cos 90° = 0$, $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

b) Mostre que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{S_{BCD}} = -3V$, em que V é o volume de $ABCD$.

Para achar o único tetraedro, usamos um sistema de coordenadas com 3 eixos perpendiculares dois a dois. Escolhemos um ponto de referência para ser a *origem* do sistema, ou seja, o $(0,0,0)$. Em sistemas de coordenadas no espaço, associamos a cada vetor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ três coordenadas reais v_1, v_2, v_3 indicando que o vetor $\vec{v}$ pode ser posicionado do ponto $(0,0,0)$ até o ponto (v_1, v_2, v_3).

Usando coordenadas, os cálculos dos produtos vetorial e escalar de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ são:

- $\vec{v} \times \vec{w} = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$. Uma maneira talvez mais fácil de lembrar é usar determinantes: $\vec{v} \times \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}\right)$.
- $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$.

Agora, considere um tetraedro $ABCD$. Escolha o sistema de coordenadas de modo que A é a origem. Vamos associar a cada tetraedro uma matriz M, cujas colunas são as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{x_b} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{x_c} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{x_d} = \overrightarrow{AD}$, e orientamos B, C e D de modo que $\det(M) > 0$. Nossa meta é encontrar, a partir dos vetores área $\overrightarrow{v_a}$, $\overrightarrow{v_b}$, $\overrightarrow{v_c}$ e $\overrightarrow{v_d}$ cuja soma é o vetor nulo, os vetores $\overrightarrow{x_b}$, $\overrightarrow{x_c}$ e $\overrightarrow{x_d}$.

c) Prove que $\det(M)$ é igual a 6 vezes o volume de $ABCD$.

Dada uma matriz quadrada M, existe uma matriz $\mathrm{adj}(M)$, denominada *adjunta* de M, tal que

$$\mathrm{adj}(M) \cdot M = \det(M) \cdot I,$$

em que I é a matriz identidade.

Sejam $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ e $\overrightarrow{u_3}$ os vetores cujas coordenadas são as linhas de $\mathrm{adj}(M)$.

d) Mostre que, sendo $i \neq j$ índices entre b, c e d, $\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{x_j} = 0$, ou seja, $\overrightarrow{u_i} \perp \overrightarrow{x_j}$, e conclua que $\overrightarrow{u_i}$ é paralelo a $\overrightarrow{v_i}$.

e) Mostre que $\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{x_i} = 6V$ para $i \in \{b, c, d\}$. Lembre-se: V é o volume do tetraedro. Conclua que $\overrightarrow{u_i} = -2\overrightarrow{v_i}$ para cada $i \in \{b, c, d\}$.

f) Nos dois itens anteriores mostramos que $\mathrm{adj}(M)$ é diretamente obtida de $\overrightarrow{v_b}$, $\overrightarrow{v_c}$ e $\overrightarrow{v_d}$. Mostre que $\det\big(\mathrm{adj}(M)\big) = (\det(M))^2$ e, consequentemente, que $M = \big(\mathrm{adj}(M)\big)^{-1}\sqrt{\det\big(\mathrm{adj}(M)\big)}$.

g) Mostre que $\overrightarrow{v_b}$, $\overrightarrow{v_c}$ e $\overrightarrow{v_d}$ determinam unicamente o tetraedro com vetores área $\overrightarrow{v_b}$, $\overrightarrow{v_c}$, $\overrightarrow{v_d}$ e $\overrightarrow{v_a} = -\overrightarrow{v_b} - \overrightarrow{v_c} - \overrightarrow{v_d}$.

h) Seja $ABCD$ um tetraedro cujas áreas de ABC e ABD são iguais a S_1 e cujas áreas de ACD e BCD são iguais a S_2. Defina $\vec{v} = \overrightarrow{S_{ABC}} + \overrightarrow{S_{ABD}}$. Considere a rotação de 180° em torno de $\vec{v}$. Mostre que essa rotação transforma $ABCD$ em um tetraedro congruente a $ABCD$ e que os triângulos ABC e ABD são congruentes (não necessariamente nessa ordem dos vértices), assim como os triângulos ACD e BCD.