XLVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (outubro de 2022)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.

- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  - (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  - (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

A *Esperança Pitagórica* é uma fórmula criada por *Bill James* (historiador, estatístico e especialista em beisebol) para estimar a porcentagem de jogos que uma equipe de beisebol deveria vencer em uma temporada baseado no número de corridas que a equipe fez e quantas ela sofreu (você não precisa entender de beisebol para resolver o problema, nós mesmos da OPM não entendemos ☺ – viva a Wikipédia!):

$$\%\text{ de Vitórias} = \frac{(\text{corridas feitas})^2}{(\text{corridas feitas})^2 + (\text{corridas sofridas})^2}$$

O nome é fruto da semelhança do denominador da fórmula com o Teorema de Pitágoras.

Por exemplo, em 2012, o New York Yankees fez 804 corridas e sofreu 668 corridas. Então, de acordo com a fórmula de Bill James:

$$\%\text{ de Vitórias} = \frac{804^2}{804^2 + 668^2} = 0{,}5916\ldots$$

Como são 162 jogos na temporada regular, a fórmula previa $0{,}5916\ldots \cdot 162 \cong 96$ vitórias. De fato, foram 95 vitórias. Nada mau…

a) O New York Mets (o outro time da cidade de Nova Iorque) fez 636 e sofreu 668 corridas em 2021. Aplicando a fórmula da Esperança Pitagórica, qual o número de vitórias esperado para a temporada? Curiosidade: a fórmula acerta em cima. Muito bom…

b) Qual deve ser a razão entre o número de corridas feitas e o número de corridas sofridas para a fórmula prever 64% de vitórias em uma temporada?

Uma possível explicação para a fórmula segue de duas hipóteses:
(i) o número de vitórias de uma equipe de beisebol é proporcional a sua “qualidade”;
(ii) a “qualidade” de uma equipe pode ser medida pela razão entre o número de corridas feitas pelo número de corridas sofridas.
Por exemplo, se o time A fez 50 corridas e sofreu 40, sua medida de qualidade seria $\frac{50}{40} = 1{,}25$. A medida de qualidade para seus oponentes, considerados coletivamente, seria $\frac{40}{50} = 0{,}8$. Se cada equipe vence em uma quantidade proporcional à sua qualidade, a porcentagem de vitórias de A seria $\frac{1{,}25}{1{,}25+0{,}8}$.

c) Sendo n número de corridas feitas e m o número de corridas sofridas, mostre que podemos concluir pelo argumento acima que:

$$\%\text{ de Vitórias} = \frac{n^2}{n^2 + m^2}$$

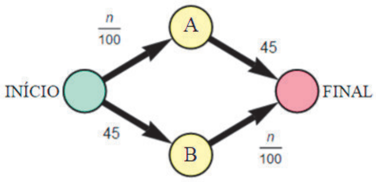
Ou seja, complete a explicação para a fórmula da Esperança Pitagórica.

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

O *Paradoxo de Braess* é a observação de que adicionar uma ou mais vias em uma rede rodoviária pode tornar o tráfego médio mais lento. Também é verdade que se uma via for retirada o tempo médio de deslocamento pode ser menor. Esse paradoxo foi descoberto pelo matemático alemão *Dietrich Braess* em 1968.

Embora pareça contraditório (por isso é chamado de paradoxo ☺), isso já aconteceu em situações reais: em 2009 alguns trechos da Broadway, na cidade de NY, foram fechados e os congestionamentos em vias alternativas se tornaram menores. De fato, chegaram a cair 40% em alguns casos.
Veremos aqui um exemplo teórico que pode ajudar a entender a existência deste paradoxo.

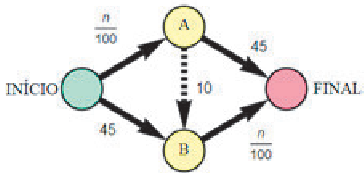
Suponha que temos um fluxo constante de 4000 carros por hora indo do INÍCIO até o FINAL no diagrama a seguir. Há dois trechos que demoraram 45 minutos para serem percorridos e outros dois que demoram $\frac{n}{100}$ minutos para serem percorridos, em que n é o número de carros passando naquele trecho por hora.



a) Se todos os 4000 carros optassem por seguir pelo caminho passando por A, qual seria o tempo médio de cada carro para ir do INÍCIO até o FINAL?

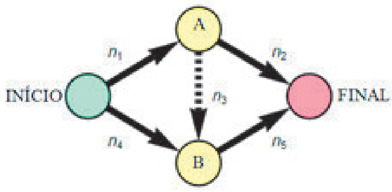
Chamamos de *equilíbrio* quando todos os caminhos possíveis têm, em média, a mesma duração. Ou seja, no nosso exemplo, os 4000 carros se dividem pelos dois caminhos (por A e por B) e demoram o mesmo tempo para ir do INÍCIO até o FINAL.
b) Suponha que a rede chega em um equilíbrio. Quantos carros passariam por A por hora? Qual seria o tempo médio de cada carro do INÍCIO até o FINAL?

Suponha que uma nova via seja adicionada e que seja possível ir de A até B em 10 minutos.



c) Considere que 2000 carros sigam a via que vai do INÍCIO para A. Considere ainda que um único motorista dentre os 2000 siga, então, pela nova via que vai de A para B. E que, chegando em B, ele se junte aos 2000 que optaram por seguir pela via que vai do INÍCIO para B. Mostre que este motorista leva menos de 51 minutos para ir do INÍCIO até o FINAL.

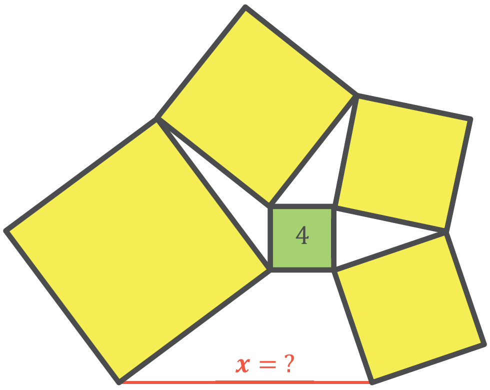
Se você fez as contas direitinho nos itens anteriores, a construção da nova via parece ter sido uma excelente decisão para melhorar o trânsito. Nas próximas perguntas, o paradoxo vai aparecer.
A nova rede rodoviária terá um novo equilíbrio e teremos quantidades n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 passando por hora em cada trecho como mostrado na figura a seguir. (*Observe que abaixo NÃO estão indicados os tempos para fazer os trajetos, como nos diagramas anteriores. Estão representados os números de carros por cada uma das vias.*)

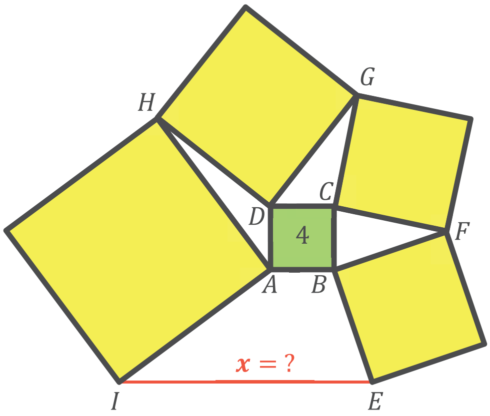


d) Nesse novo equilíbrio cada uma das três formas de ir do INÍCIO até o FINAL levará o mesmo tempo médio. Escreva expressões utilizando as variáveis n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 para os tempos em minutos em cada uma das três formas.
e) A partir das equações do item anterior, prove que $n_1 = n_5 = 3500$.
f) Observando que todos os carros partem do INÍCIO, obtemos que $n_1 + n_4 = 4000$. Como todos os carros que chegam por A devem sair, $n_1 = n_2 + n_3$. Escreva as equações correspondentes para B e para FINAL.
g) Levando em conta os itens d, e e f, encontre os valores de n_2, n_3 e n_4.
h) Conclua calculando, nessa nova situação de equilíbrio, qual é o tempo médio de cada motorista do INÍCIO até o FINAL? *Se tudo correu bem, aqui aparecerá o paradoxo, ou seja, apesar de ter sido construída uma nova via, o tempo médio aumenta.*

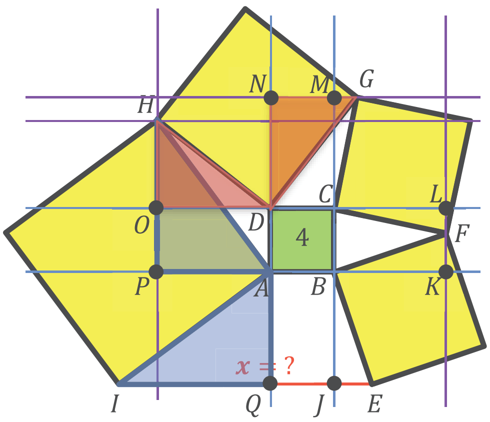
PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos
Diego Rattaggi (@diegorattagi) é um matemático que usa o Twitter para divulgar problemas e resultados matemáticos interessantes. Vamos ver um desses problemas o qual foi postado no dia 28 de abril de 2020.
O quadrado central na figura a seguir possui área 4. Há 4 quadrados construídos ao redor do quadrado central cada um com um vértice em comum com o quadrado central e 3 outros pontos que são vértices comuns de dois desses quadrados, como podemos ver na primeira figura a seguir.

O segmento de reta ligando dois vértices inferiores de dois dos quadrados é paralelo ao lado inferior do quadrado central e possui comprimento x. Qual é o valor de x? Calma! Veremos como calcular esse valor passo a passo! Primeiro vamos dar nomes aos pontos. O quadrado central será $ABCD$, os vértices comuns dos quadrados F, G e H e o segmento de medida x será denominado EI, com $EI \parallel AB$.





Prolongamos os lados do quadrado e traçamos retas paralelas aos lados pelos pontos F, G e H marcando os pontos J, K, L, M, N, O, P e Q como mostrado na figura a seguir.



a) Calcule o lado do quadrado $ABCD$.
b) Explique por que $m(Q\hat{A}I) = m(P\hat{A}H)$, $AI = AH$ e $m(A\hat{I}Q) = m(A\hat{H}P)$.
Após provar as igualdades de ângulos e a de segmentos podemos concluir que os triângulos AQI e APH são congruentes pelo caso de congruência ALA.
c) Prove que os triângulos DOH e DNG são congruentes usando o caso de congruência ALA.
d) Prove que os triângulos BJE e BKF são congruentes.
e) Suponha que a medida do segmento JE é y. Prove que a medida do segmento NG é $4 - y$.
f) Determine a medida x do segmento IE.

PROBLEMA 4 – $\boxed{\textbf{Valor: 3 pontos}}$
Para n inteiro positivo, a soma dos quadrados de seus divisores positivos é denotada por $\sigma_2(n)$. Por exemplo, $\sigma_2(12) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 12^2 = 210$.
a) Calcule $\sigma_2(40)$.

Se p e $p + 2$ são ambos números primos, dizemos que formam um par de *primos gêmeos*. Não se sabe até hoje se existem infinitos pares de primos gêmeos. É um dos mais famosos problemas em aberto da Matemática.
b) Suponha que p e $p + 2$ são primos gêmeos. Sendo $n = p(p + 2)$, mostre que:

$$\sigma_2(n) = n^2 + 2n + 5.$$

c) Suponha que p é primo. Sendo $n = p^2$, calcule $\sigma_2(n)$ em termos de n.

Considere agora que $n = ab$ para inteiros a e b tais que $1 < a < b < n$. Seja ainda S a soma dos quadrados dos divisores de n diferentes de 1, de a, de b e do próprio n. Então $\sigma_2(n) = 1 + a^2 + b^2 + n^2 + S$.
d) Nas condições do parágrafo imediatamente acima, mostre que se $\sigma_2(n) = n^2 + 2n + 5$, então $S = 0$ e $b = a + 2$.
Dica: nesse item você pode querer utilizar que, como $(b - a)^2 > 0 \Leftrightarrow b^2 - 2ab + a^2 > 0$, *vale a seguinte desigualdade*

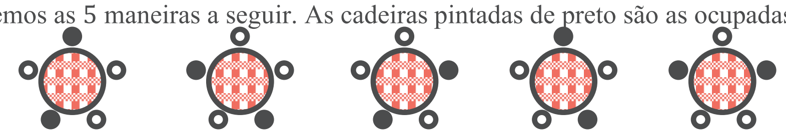
$$a^2 + b^2 > 2ab$$

e) A equação $\sigma_2(n) = n^2 + 2n + 5$ possui outras soluções além de $n = p(p + 2)$ em que p e $p + 2$ formam um par de primos gêmeos? *Não se esqueça de que você deve justificar as suas respostas.*

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

Suponha que tenhamos uma mesa redonda com n lugares sem pessoas adjacentes e sem a possibilidade de colocar mais pessoas a não ser que duas fiquem adjacentes. Chamamos tais distribuições de *mesas cheias*.

Por exemplo, para $n = 5$, temos as 5 maneiras a seguir. As cadeiras pintadas de preto são as ocupadas.



Observe que, se colocarmos apenas uma pessoa na mesa, sempre é possível acrescentar mais uma e, portanto, a condição do problema não é satisfeita. Também podemos verificar que é impossível colocar três pessoas na mesa dentro destas condições.

Seja a_n o número de mesas cheias de n lugares. Acabamos de mostrar que $a_5 = 5$. Temos ainda que (é fácil verificar!): $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ e $a_4 = 2$ (isso mesmo, não é 4).

a) Calcule a_6 (*dica: não dá* 6), a_7, a_8 e a_9 e complete a tabela a seguir na sua folha de respostas. *Não se esqueça que você deve justificar suas respostas.*

a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
2	3	2	5				

Vamos provar nos próximos dois itens que a sequência a_n satisfaz uma recursão da forma:

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3}$$

em que $n \geq 5$ e c_1, c_2 e c_3 são constantes.

b) Calcule c_1, c_2 e c_3.

c) Prove que a_n satisfaz a recursão $a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3}$, para $n \geq 5$, com as constantes obtidas no item anterior.

(Super) Dica: considere que as cadeiras têm uma numeração fixada como as mostradas abaixo para mesas cheias com, respectivamente, $n = 10$ *e* $n = 11$ *cadeiras.*

Observe que é possível, a partir dessas distribuições que satisfazem as condições do problema, obter uma regra que identifique de maneira única mesas cheias que satisfazem o problema para $n = 13$ *cadeiras.*

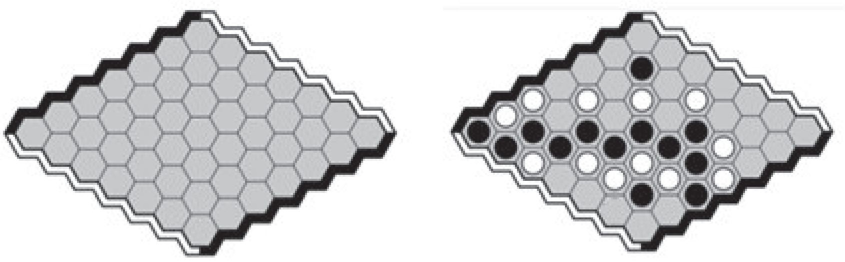
d) Calcule a_{13} e a_{17}.

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Você já jogou Hex? Calma! Se você nunca jogou, não se preocupe. Vamos passar as informações essenciais sobre o jogo para você poder resolver este problema.

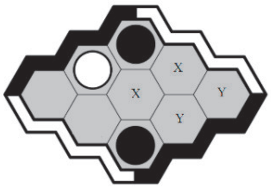
Hex é um jogo de tabuleiro jogado em uma grade hexagonal. O tamanho do tabuleiro pode variar, mas o mais comum é o 11×11. São dois jogadores: o primeiro joga com as peças pretas e o segundo com as peças brancas. O tabuleiro possui 4 lados, dois lados opostos são pretos e os outros dois são brancos. As jogadas são alternadas e cada jogador na sua vez coloca uma peça da sua cor em um dos hexágonos que não esteja ocupado ainda. O objetivo de cada jogador é formar um caminho conectando os lados da sua cor por meio de hexágonos com peças dessa cor.

Nas figuras a seguir, temos dois tabuleiros 7×7, no primeiro ainda não foi feita a primeira jogada e no segundo o primeiro jogador (o das peças pretas) venceu. (Verifique!)



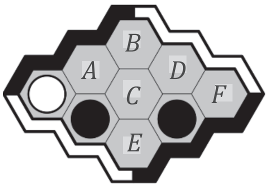
Vamos aprender uma técnica muito útil para vencer partidas de Hex: *pareamento*. Essa técnica consiste em montar pares de casas não ocupadas do tabuleiro de modo que se o adversário joga em uma das casinhas, então o jogador usando a técnica irá jogar na outra casinha do par.

Considere, e.g., a seguinte situação após 3 jogadas.

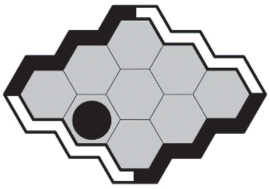


O primeiro jogador (pretas) pode garantir sua vitória usando os pareamentos X e Y. Não importa o que segundo jogador fizer, o primeiro poderá ocupar uma casa X e uma casa Y com peças pretas e vencer o jogo. Vale a pena observar que se o jogador das brancas não escolher a casa central (X) na próxima jogada, ele perde imediatamente depois.

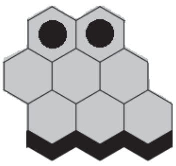
a) Considere o tabuleiro 3×3 a seguir após 3 jogadas. É a vez do segundo jogador (peças brancas) jogar. Explique como o segundo jogador pode garantir sua vitória. Você pode indicar as casinhas das jogadas usando as letras marcadas. Pode usar tais letras também para apresentar pareamentos.
(*Observe que se as pretas ocuparem as casas indicadas por E e F não temos uma vitória do primeiro jogador. Ele terá ligado os lados brancos.*)

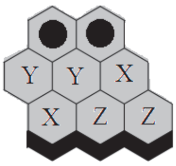


b) Considere o tabuleiro 3×3 a seguir após a primeira jogada. Mostre uma maneira de o primeiro jogador (pretas) usar pareamentos para garantir sua vitória.

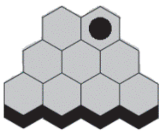


Vamos deixar o 3×3 e partir para tabuleiros maiores. Para elaborar novas estratégias precisamos reconhecer que, em certas configurações, podemos garantir a conexão das pecinhas pretas com o lado preto, não importando as jogadas do adversário. Por exemplo, a configuração denominada $3-3-2$ a seguir tem conexão garantida usando os pareamentos X, Y e Z.



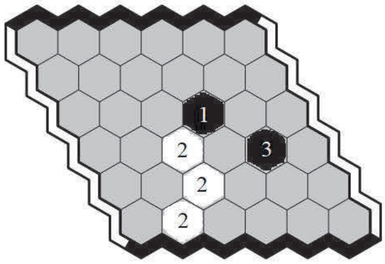


c) A configuração a seguir é chamada de $4-3-2$. Usando pareamentos, prove que esta configuração tem conexão garantida. Considere que é a vez do segundo jogador.



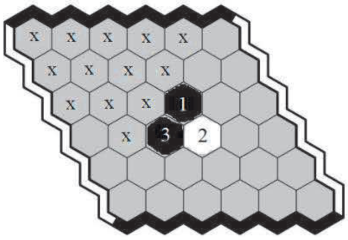
Em 1943, durante uma palestra sobre o Hex, o estudante de física *Jens Lindhard* mostrou uma estratégia completa de como o primeiro jogador pode vencer em um tabuleiro 6×6. Para isso, ele mostrou a jogada 1 do primeiro jogador e as possíveis jogadas 3 do primeiro jogador de acordo com a jogada 2 do segundo jogador.

d) Uma dessas configurações é mostrada a seguir. O primeiro jogador joga em 1, o segundo joga em uma das casinhas marcadas com 2 e o primeiro joga na casa 3.

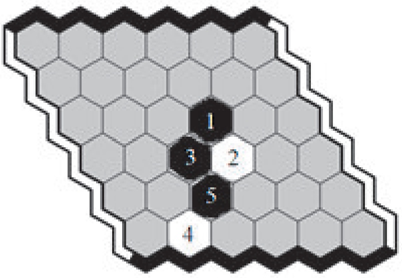


Explique por que, após a jogada na casa 3, o primeiro jogador possui estratégia vencedora.

e) Considere que outro jogo comece com as seguintes jogadas 1, 2 e 3. Suponha ainda que a jogada 4 seja em uma das casinhas marcadas com X. Utilizando pareamentos, prove que o primeiro jogador sempre consegue completar um caminho da casinha 1 até a lateral superior do tabuleiro.



Ainda usando as três jogadas iniciais do item e, suponha que o segundo jogador tente evitar a vitória do primeiro completando um caminho de 1 até a lateral inferior do tabuleiro. O segundo faz a jogada 4 e o primeiro responde com a jogada 5.



f) Demonstre que o primeiro jogador possui estratégia vencedora na configuração acima. Ou seja, que não importa quais sejam as jogadas do segundo jogador, o primeiro jogador (pretas) consegue vencer.

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos
Uma das sequências mais importantes da Matemática é a *Sequência de Fibonacci*:

$$F_0 = 0;\ F_1 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 0.$$

Ou seja:

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1; F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2; F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3; \text{etc.}$$

Pode-se demonstrar (você não precisa fazer isso agora) que os termos da Sequência de Fibonacci podem ser dados pela *Fórmula de Binet*:

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\alpha^n - \beta^n), n \geq 0.$$

Em que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a chamada *razão áurea*, e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Neste problema demonstraremos uma bela identidade envolvendo os números da Sequência de Fibonacci.

a) Prove que $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$, para todo $n \geq 1$.
Dica: você pode desejar utilizar a Fórmula de Binet. E lembre-se de que você não precisa demonstrá-la!

b) Mostre que $F_n^4 - 1 = F_{n+2}F_{n+1}F_{n-1}F_{n-2}$, para todo $n \geq 0$.

Para o próximo item considere as sequências, $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{F_{2n+3}}{F_{n+3}F_n} \text{ e } b_n = \frac{F_{n+2}}{F_n}.$$

c) Demonstre que, $n \geq 1$:

$$b_n = a_n + \frac{1}{b_{n+1}}.$$

d) A partir do item c, conclua que:

$$b_1 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

e) Calcule o valor de

$$\cfrac{F_3^4 - 1}{F_7 + \cfrac{F_4^4 - 1}{F_9 + \cfrac{F_5^4 - 1}{F_{11} + \cfrac{F_6^4 - 1}{\ddots}}}}$$

Não se esqueça de que você deve justificar as suas respostas.