# XLVI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

## Fase Única (outubro de 2022)

## Nível $\alpha$ (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

***Folha de Perguntas***

**Instruções**:

- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

**Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.**

- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

---

**PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos**

No Campeonato Argentino de Futebol Masculino, o rebaixamento da primeira para a segunda divisão é decidido da seguinte forma: para cada time, a média de pontos por jogo nos últimos três anos é calculada, e os times com as menores médias são rebaixados. Os jogos que entram no cálculo dessa média são os da primeira divisão do Campeonato Argentino e os da Copa da Liga Profissional.

Por exemplo, o Racing, campeão argentino de 2018/2019, obteve 55 pontos em 2016/2017, 45 pontos em 2017/2018 e 57 pontos em 2018/2019, obtidos em um total de 82 jogos. Com isso, sua média de pontos por jogo das três temporadas foi $\frac{55+45+57}{82} \cong 1{,}915$.

a) Na mesma temporada de 2018/2019, o campeão da Copa Argentina (que na época não entrava na média), o Tigre, obteve 31 pontos em 2016/2017, 24 pontos em 2017/2018 e 36 pontos em 2018/2019, obtidos em um total de 82 jogos. Apesar de nunca ter terminado entre os quatro últimos nos três anos (24º de 30 em 2016/2017, 24º de 28 em 2017/2018, 9º de 26 em 2018/2019), o Tigre foi um dos quatro times rebaixados naquela temporada. Calcule a média de pontos por jogo do Tigre.

Na temporada 2021/2022, o Vélez Sarsfield está em penúltimo lugar do Campeonato Argentino, cada time vai jogar mais 10 jogos, e o regulamento prevê dois rebaixados. Nesse momento, os dois clubes com menores médias são o Patronato, com um total de 94 pontos em 93 jogos, e Aldovisi, com 99 pontos em 93 jogos.

b) Calcule as maiores médias possíveis que Patronato e Aldovisi podem obter se ambos vencessem os últimos 10 jogos. Lembrando que no futebol, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e cada derrota vale 0 ponto.

c) O Vélez Sarsfield tem um total de 139 pontos em 93 jogos. Calcule a menor média possível que o clube pode obter e mostre que é impossível que o Vélez Sarfield seja rebaixado nesta temporada.

**PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos**

*Nesta questão falamos sobre apostas esportivas, mas apenas pela matemática envolvida. Lembramos que apenas maiores de idade podem fazer apostas.*

Este é um ano de Copa do Mundo e é comum as pessoas fazerem apostas ou participarem de bolões envolvendo os resultados do torneio. De fato, atualmente, é comum os fãs apostarem em sites especializados. Uma ideia que parece fazer sentido é: *vou apostar em todos os times, ganharei de qualquer jeito!* Neste problema, veremos que essa ideia não é tão boa quanto parece.

Inicialmente, vamos entender como os sites costumam publicar o quanto eles pagam por valor apostado. Para isso vamos precisar do conceito de *chance* (*odds*: chances em Inglês). Sendo $s$ o número de *sucessos* (resultados favoráveis) e $n$ o número de resultados possíveis, a chance do evento é $(n-s)/s$. Costuma-se ler: *a chance é* $n-s$ *para* $s$. Observe que $n-s$ corresponde ao número de *fracassos* (resultados desfavoráveis).

Por exemplo, ao lançarmos um dado padrão de seis faces, a chance de obter a face com o número 6 é $5/1$ (lemos 5 para 1). Há 5 resultados desfavoráveis (as faces com os números 1, 2, 3, 4 e 5) e apenas um favorável (a face com o 6). Observe que $5/1 = 5$, mas escrevemos a chance sempre na forma de fração. Quando a fração é redutível, é usual simplificá-la. Por exemplo a chance de tirar 1 ou 2 em um dado de seis faces é $4/2 = 2/1$ (lemos 2 para 1).

a) Calcule a chance de obter um número par ao lançar um dado padrão de seis faces?

A probabilidade $p$ de um resultado favorável é igual a $\frac{\text{número de sucessos}}{\text{número de resultados possíveis}}$, ou seja, pode ser calculada pela fórmula $p = \frac{s}{n}$.

Podemos relacionar a chance $c$ e a probabilidade $p$ usando o seguinte desenvolvimento.

$$c = \frac{n-s}{s} = \frac{\frac{(n-s)}{n}}{\frac{s}{n}} = \frac{\frac{n}{n} - \frac{s}{n}}{\frac{s}{n}} = \frac{1-p}{p}$$

Logo, por meio da fórmula $c = \frac{1-p}{p}$, sabendo $c$ podemos calcular $p$ e vice-versa.

b) Um site de apostas afirma que o Brasil é favorito para a Copa (oba!) e a sua chance de ser campeão é $9/2$. Calcule a probabilidade de o Brasil vencer a Copa segundo este site.

c) Faça o "inverso" do que foi feito acima, ou seja, escreva uma fórmula que tenha de um lado apenas o $p$ e do outro uma expressão em termos de $c$.

As chances fornecidas pelos sites de apostas também indicam quanto eles pagam para as pessoas que acertam seus prognósticos esportivos. Quando um site diz que a chance do Brasil na Copa é $9/2$, isso também quer dizer que, para cada 2 reais apostados na vitória do nosso país, um acertador, além de receber os 2 reais de volta, receberia 9 reais. Ou seja, receberia 11 reais de prêmio para cada 2 reais apostados.
d) Em outro site de apostas, encontramos que a chance da Costa Rica na Copa é $750/1$. Quem apostar 100 reais na Costa Rica recebe quanto no total se ganhar a aposta?

Ótimo! Estamos prontos agora para entender como os sites de apostas conseguem ter lucro. Antes de começar a explicação, vale a pena notar que é normal nos sites termos chances que tem 1 como denominador, pois é uma forma mais simples de indicar quanto eu terei de lucro por real apostado se ganhar. Exemplificando, como $9/2 = 4{,}5/1$ para cada $R\$1{,}00$ apostado temos $R\$4{,}50$ de lucro se o Brasil for hexa (☺).
Suponha a tabela a seguir forneça as chances de cada equipe na *Ashes Cricket Series*, uma competição bienal de críquete entre Austrália e Inglaterra (vamos variar um pouco nossos esportes).

| País | Chance |
|---|---|
| Austrália | $0{,}65/1$ |
| Inglaterra | $2{,}30/1$ |
| Empate | $4{,}50/1$ |

e) Quanto seria necessário apostar na Austrália, aproximadamente, para receber 100 reais no total no caso de vitória deste país? Observe que não é para ter um lucro de 100 reais, é para receber 100 reais ao todo pela aposta.

f) Se um jogador quiser garantir 100 reais no total não importando o resultado da competição, quantos reais aproximadamente ele teria que apostar ao todo? Observe que ele teria que fazer apostas na Austrália na Inglaterra e no empate para assegurar o recebimento.
*Observação: esse valor é maior do que 100 reais.*

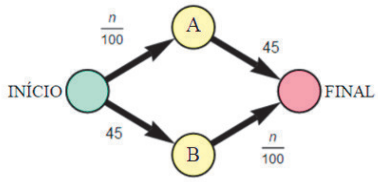
Pronto! Esse exemplo reforça que os sites tomam cuidado para não ser possível ganhar dinheiro apostando em todas as possibilidades. Porém, quem sabe, se olharmos todos os sites e escolhermos os que pagam mais por cada opção? Será que é possível ter lucro assim? Isso é bem raro, mas pode acontecer e é chamada oportunidade de *arbitragem* (essa arbitragem não tem nada a ver com o juiz do futebol).
Vejamos se há uma oportunidade de arbitragem para o primeiro jogo do Brasil na Copa, contra a Sérvia. Temos, na tabela abaixo, a chance em vários sites:

| Sites | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Brasil | $23/50$ | $4/9$ | $1/2$ | $4/9$ | $4/9$ | $4/9$ | $4/9$ | $2/5$ | $2/5$ |
| Empate | $33/10$ | $10/3$ | $3/1$ | $10/3$ | $13/4$ | $16/5$ | $31/10$ | $14/5$ | $3/1$ |
| Sérvia | $26/5$ | $6/1$ | $6/1$ | $6/1$ | $59/10$ | $6/1$ | $11/2$ | $5/1$ | $11/2$ |

g) Para cada um dos 3 resultados, identifique qual (ou quais) dos sites paga o maior valor por aposta. Para cada resultado pode haver mais de uma resposta.
h) Escolhendo os sites que pagam melhor, quantos reais, aproximadamente, seriam necessários apostar para garantir 100 reais no total, não importando o resultado do primeiro jogo do Brasil na Copa?

**PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos**
O *Paradoxo de Braess* é a observação de que adicionar uma ou mais vias em uma rede rodoviária pode tornar o tráfego médio mais lento. Também é verdade que se uma via for retirada o tempo médio de deslocamento pode ser menor. Esse paradoxo foi descoberto pelo matemático alemão *Dietrich Braess* em 1968.
Embora pareça contraditório (por isso é chamado de paradoxo ☺), isso já aconteceu em situações reais: em 2009 alguns trechos da Broadway, na cidade de NY, foram fechados e os congestionamentos em vias alternativas se tornaram menores. De fato, chegaram a cair 40% em alguns casos.
Veremos aqui um exemplo teórico que pode ajudar a entender a existência deste paradoxo.

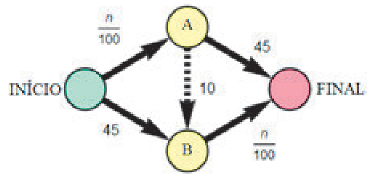
Suponha que temos um fluxo constante de 4000 carros por hora indo do INÍCIO até o FINAL no diagrama a seguir. Há dois trechos que demoraram 45 minutos para serem percorridos e outros dois que demoram $\frac{n}{100}$ minutos para serem percorridos, em que $n$ é o número de carros passando naquele trecho por hora.




a) Se todos os $4000$ carros optassem por seguir pelo caminho passando por $A$, qual seria o tempo médio de cada carro para ir do INÍCIO até o FINAL?

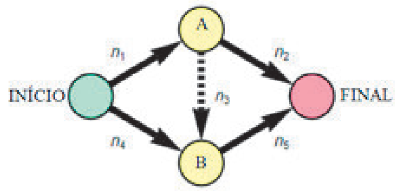
Chamamos de *equilíbrio* quando todos os caminhos possíveis têm, em média, a mesma duração. Ou seja, no nosso exemplo, os $4000$ carros se dividem pelos dois caminhos (por $A$ e por $B$) e demoram o mesmo tempo para ir do INÍCIO até o FINAL.
b) Suponha que a rede chega em um equilíbrio. Quantos carros passariam por $A$ por hora? Qual seria o tempo médio de cada carro do INÍCIO até o FINAL?

Suponha que uma nova via seja adicionada e que seja possível ir de $A$ até $B$ em $10$ minutos.




c) Considere que $2000$ carros sigam a via que vai do INÍCIO para $A$. Considere ainda que um único motorista dentre os $2000$ siga, então, pela nova via que vai de $A$ para $B$. E que, chegando em $B$, ele se junte aos $2000$ que optaram por seguir pela via que vai do INÍCIO para $B$. Mostre que este motorista leva menos de $51$ minutos para ir do INÍCIO até o FINAL.

Se você fez as contas direitinho nos itens anteriores, a construção da nova via parece ter sido uma excelente decisão para melhorar o trânsito. Nas próximas perguntas, o paradoxo vai aparecer.
A nova rede rodoviária terá um novo equilíbrio e teremos quantidades $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$ e $n_5$ passando por hora em cada trecho como mostrado na figura a seguir. (*Observe que abaixo NÃO estão indicados os tempos para fazer os trajetos, como nos diagramas anteriores. Estão representados os números de carros por cada uma das vias.*)




d) Nesse novo equilíbrio cada uma das três formas de ir do INÍCIO até o FINAL levará o mesmo tempo médio. Escreva expressões utilizando as variáveis $n_1, n_2, n_3, n_4$ e $n_5$ para os tempos em minutos em cada uma das três formas.
e) A partir das equações do item anterior, prove que $n_1 = n_5 = 3500$.
f) Observando que todos os carros partem do INÍCIO, obtemos que $n_1 + n_4 = 4000$. Como todos os carros que chegam por $A$ devem sair, $n_1 = n_2 + n_3$. Escreva as equações correspondentes para $B$ e para FINAL.
g) Levando em conta os itens $d$, $e$ e $f$, encontre os valores de $n_2$, $n_3$ e $n_4$.
h) Conclua calculando, nessa nova situação de equilíbrio, qual é o tempo médio de cada motorista do INÍCIO até o FINAL? *Se tudo correu bem, aqui aparecerá o paradoxo, ou seja, apesar de ter sido construída uma nova via, o tempo médio aumenta.*

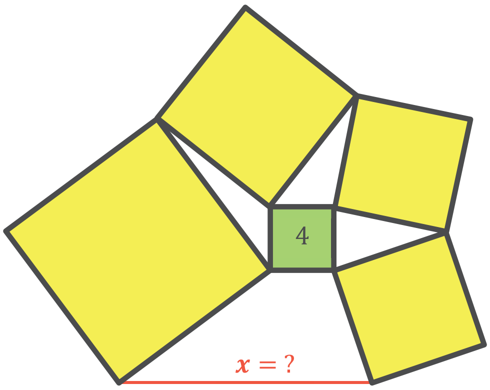
**PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos**
Dizemos que um número inteiro positivo $n$ é *fofo* se $n = a + b + c$ em que $a$, $b$ e $c$ são inteiros positivos com $a < b < c$ e tais que $a$ é um divisor de $b$ e $b$ é um divisor de $c$. Por exemplo, $10$ é um número fofo, pois $10 = 1 + 3 + 6$ e $1$ é divisor de $3$ e $3$ é divisor de $6$.
a) Determine o menor número fofo. Não se esqueça de justificar sua resposta, ou seja, você deve mostrar que tal número é fofo e os menores do que ele não são.
b) Verifique que $9$, $11$ e $2023$ são fofos. Ou seja, para cada um desses três números encontre inteiros positivos $a$, $b$ e $c$ com $a < b < c$, tais que $a$ é um divisor de $b$ e $b$ é um divisor de $c$, e cuja soma seja o número.
c) Quais números ímpares não são fofos? Lembre-se de justificar sua resposta.
d) Verifique que $2022$ e $2024$ são fofos.
e) Demonstre que se $n$ é fofo, então $2n$ também é fofo.
f) Todo número inteiro positivo $n$ pode ser escrito na forma $n = 2^a \cdot b$ em que $a$ é natural e $b$ é um número ímpar. Por exemplo: $12 = 2^2 \cdot 3$; $16 = 2^4 \cdot 1$; $5 = 2^0 \cdot 5$.
Prove que se o inteiro positivo ímpar $b$ é fofo, $a$ é natural e $n = 2^a \cdot b$, então $n$ é fofo.
g) Verifique que $16$ e $48$ são fofos.
h) Determine o maior número que não é fofo. Ou seja, você deve provar que este número não é fofo e que todos os maiores do que ele são.

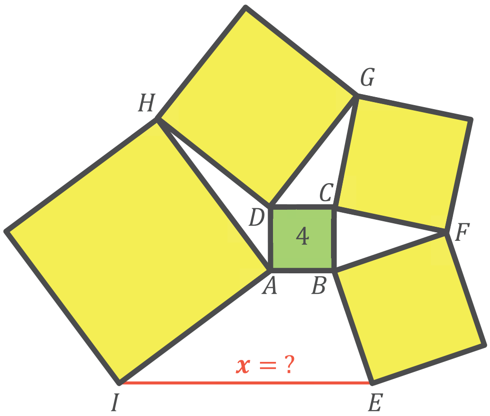
**PROBLEMA 5 –** $\boxed{\textbf{Valor: 3 pontos}}$

*Diego Rattaggi* (@diegorattagi) é um matemático que usa o Twitter para divulgar problemas e resultados matemáticos interessantes. Vamos ver um desses problemas o qual foi postado no dia 28 de abril de 2020.

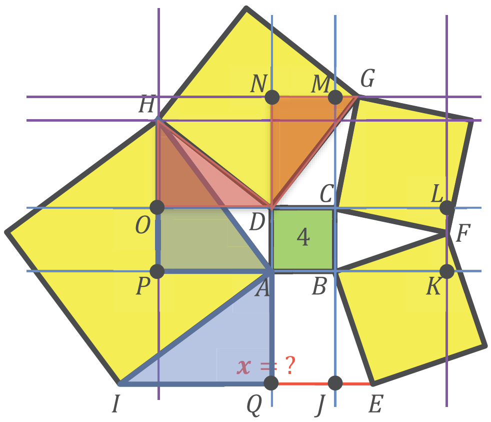
O quadrado central na figura a seguir possui área 4. Há 4 quadrados construídos ao redor do quadrado central cada um com um vértice em comum com o quadrado central e 3 outros pontos que são vértices comuns de dois desses quadrados, como podemos ver na primeira figura a seguir.

O segmento de reta ligando dois vértices inferiores de dois dos quadrados é paralelo ao lado inferior do quadrado central e possui comprimento $x$. Qual é o valor de $x$? Calma! Veremos como calcular esse valor passo a passo! Primeiro vamos dar nomes aos pontos. O quadrado central será $ABCD$, os vértices comuns dos quadrados $F$, $G$ e $H$ e o segmento de medida $x$ será denominado $EI$, com $EI \parallel AB$.




Prolongamos os lados do quadrado e traçamos retas paralelas aos lados pelos pontos $F$, $G$ e $H$ marcando os pontos $J$, $K$, $L$, $M$, $N$, $O$, $P$ e $Q$ como mostrado na figura a seguir.




a) Calcule o lado do quadrado $ABCD$.

b) Explique por que $m(Q\hat{A}I) = m(P\hat{A}H)$, $AI = AH$ e $m(A\hat{I}Q) = m(A\hat{H}P)$.

Após provar as igualdades de ângulos e a de segmentos podemos concluir que os triângulos $AQI$ e $APH$ são congruentes pelo caso de congruência ALA.

c) Prove que os triângulos $DOH$ e $DNG$ são congruentes usando o caso de congruência ALA.

d) Prove que os triângulos $BJE$ e $BKF$ são congruentes.

e) Suponha que a medida do segmento $JE$ é $y$. Prove que a medida do segmento $NG$ é $4 - y$.

f) Determine a medida $x$ do segmento $IE$.

**PROBLEMA 6 –** $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

Para quem gosta de problemas matemáticos é muito comum se deparar com enigmas japoneses.

Um desses enigmas consiste em particionar o conjunto dos números naturais de 1 a 60 em 30 subconjuntos de 2 números de modo que a diferença entre o maior e o menor número em cada subconjunto seja igual a 1 ou 10 a partir de alguns subconjuntos já determinados.

a) Se dois dos subconjuntos são $\{1; 11\}$ e $\{59; 60\}$ indique uma maneira de completar os 30 subconjuntos.

Listar cada subconjunto de números pode ser bastante trabalhoso e complicado. Uma forma diferente de fazer isto é representar os subconjuntos usando pares de casinhas no tabuleiro $6 \times 10$ a seguir, em que cada número natural de 1 a 60 ocupa uma casinha. Veja que o conjunto $\{1; 11\}$ pode ser representado pelo dominó vertical $1 \times 2$ no canto superior esquerdo e o conjunto $\{59; 60\}$ pelo dominó horizontal no canto inferior direito. O tabuleiro foi pintado com cores alternadas de modo que duas casinhas com um lado em comum possuam cores diferentes.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |

b) Praticamente todos os subconjuntos de 2 números com diferença 1 ou 10 de $\{1,2,\ldots,60\}$ formam dominós horizontais ou verticais no tabuleiro. Indique todos os subconjuntos que são exceção, ou seja, a diferença entre o maior e o menor número no subconjunto é 1 ou 10, porém tal par de números não forma um dominó horizontal ou vertical no tabuleiro acima.
c) Se dois conjuntos são $\{10; 11\}$ e $\{20; 30\}$, qual é o número que forma o subconjunto com o 41? *Não se esqueça de que você deve justificar suas respostas.*
d) Existem maneiras de determinar três subconjuntos de 2 números que tornam impossível completar a tarefa de formar os 30 subconjuntos com diferenças 1 ou 10. Indique uma dessas maneiras e explique por que é impossível formar os 30 subconjuntos.

**PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos**
Dado um número inteiro positivo $n$, calcule a soma dos quadrados de seus dígitos. Sendo $n_1$ tal soma, calcule a soma dos quadrados dos dígitos de $n_1$. Sendo $n_2$ tal soma, calcule a soma dos quadrados dos dígitos de $n_2$. E assim sucessivamente.
Dizemos que o $n$ é um *número feliz*, se após $k$ iterações, obtivermos $n_k = 1$. Por exemplo, o número 7 é feliz. Vejamos:

**1ª Iteração**: o único dígito de 7 é o próprio 7 e $7^2 = 49$.
**2ª Iteração**: os dígitos de 49 são 4 e 9. $4^2 + 9^2 = 97$.
**3ª Iteração**: os dígitos de 97 são 9 e 7. $9^2 + 7^2 = 130$.
**4ª Iteração**: os dígitos de 130 são 1, 3 e 0. $1^2 + 3^2 + 0^2 = 10$.
**5ª Iteração**: os dígitos de 10 são 1 e 0. $1^2 + 0^2 = 1$.

Demorou um pouco, mas aí está: 7 é feliz! Mas valeu a pena, pois descobrimos pelo caminho outros números felizes: 49, 97, 130 e 10. De fato, como os zeros não têm influência no resultado da soma dos quadrados, 13 também é feliz. Além do 1, é claro! Mais ainda, a ordem dos dígitos não faz diferença, ou seja, 94, 79, 31, 301 e 3010 são exemplos de números felizes.
a) 3 é um número feliz? E o 19? 23 é?
b) Determine dois números felizes consecutivos maiores do que 2021.

Dizemos que a *altura* de um número feliz é o número de iterações para chegar a 1. Por exemplo, a altura do número feliz 7 é 5.

c) Qual é a altura do número feliz 356? E de 78999? E de $3788\overbrace{99\ldots9}^{973\text{ noves}}$? (Observe que este último apresentado possui 977 dígitos.)

Se você não errou contas no item anterior, deve ter percebido que é não é tão complicado obter números felizes cada vez de maior altura aproveitando números cuja altura é conhecida e montando números cheios de 9´s para obter alguma soma de dígitos adequada.
Porém isso pode ser mais simples ainda. Pense em números formados apenas por dígitos 1. Por exemplo, 1.111.111, cuja soma dos quadrados dos dígitos é 7, é um número feliz de altura 6.
d) Explique como obter um número feliz de altura 10. Não precisa exibir o número, ele será ENORME! Apenas explique como obtê-lo.

Podemos verificar (mas não vamos fazer isso agora) que 129, 130 e 133 são números felizes. Observando que $130 - 129 = 1$ e $133 - 129 = 4$, podemos construir uma sequência de três números consecutivos felizes. Vamos ver como!
– Tomemos um número cuja soma dos quadrados dos seus dígitos é 129, e.g., 188.
– Acrescente um zero ao seu final: 1880 (Calma! Isso já vai fazer sentido.)
– Como as diferenças entre as somas dos números felizes originais são 1 e 4, 1880, 1881 e 1882 são três números felizes consecutivos. Te juro que, sem esse truque, isso é bem difícil de encontrar!
e) Considerando ainda que 193 (não precisa verificar) também é um número feliz, apresente quatro números felizes consecutivos.