XLV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (novembro de 2021)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

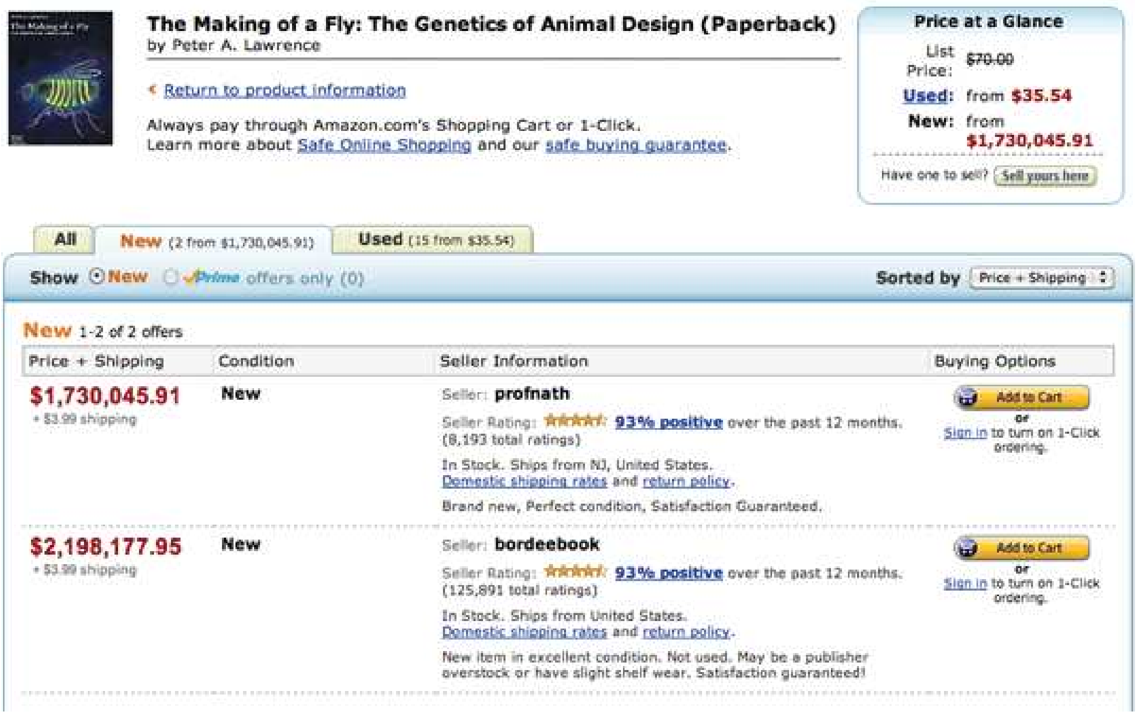
- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.

- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

O pesquisador e biólogo Michael Eisen relatou uma história muito curiosa no seu blog "it is NOT junk" (https://www.michaeleisen.org/blog/). Ao pesquisar sobre o livro *The Making of a Fly* no site Amazon.com, ele encontrou duas opções para comprar o livro novo (imagem a seguir) custando 1.730.045,91 e 2.198.177,95 dólares, além de 3,99 dólares de envio (isso mesmo, não tinha frete grátis).



a) Com o valor cobrado por profnath, seria possível pagar os fretes individuais de 3,99 dólares de quantos livros?

Por melhor que fosse o livro, Michael não acreditou que os dois vendedores esperassem vender por aquele preço e começou a acompanhar os valores para tentar descobrir o que estava acontecendo. Michael notou que todos os dias o vendedor profnath atualizava o seu preço para 0,9983 do preço de bordeebook. Segundo Michael faria sentido ter o livro e tentar vender um pouco mais barato que o maior preço disponível. Algumas horas depois o vendedor bordeebook aumentava o seu preço para 1,270589 do preço de profnath. Para Michael isso poderia significar que bordeebook não tinha o produto e se alguém fizesse o pedido, o livro seria comprado do outro vendedor e bordeebook lucraria com a diferença de preços. Provavelmente esses preços eram atualizados automaticamente através de algoritmos e programas desses vendedores.

b) A partir das informações fornecidas, qual foi aproximadamente o aumento percentual diário do preço do livro do vendedor profnath? Considere que a cada dia há exatamente uma alteração do preço de cada vendedor.

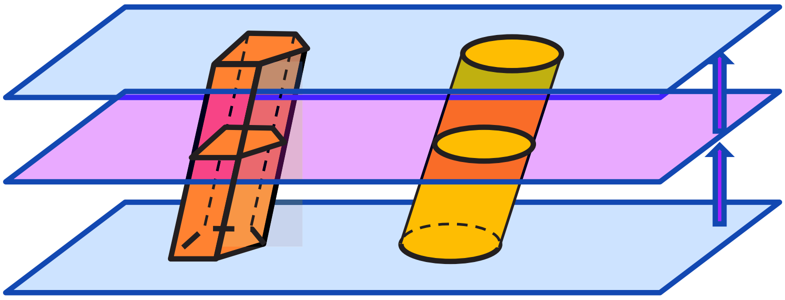
c) Michael acompanhou os aumentos até o preço do vendedor profnath chegar a 18.651.718,08 dólares. Considerando que o aumento diário foi um pouco superior a 25%, aproximadamente, durante quantos dias Michael acompanhou esses preços? Você pode querer utilizar que $\log 2 = 0{,}301$.

No final das contas, Michael reporta que o preço de profnath caiu para apenas 106,23 dólares e foi seguido pelo preço de bordeebook que baixou para 134,97 dólares. Esse livro novo não está mais disponível no site da Amazon.com. (Depois desse descontão, né?)

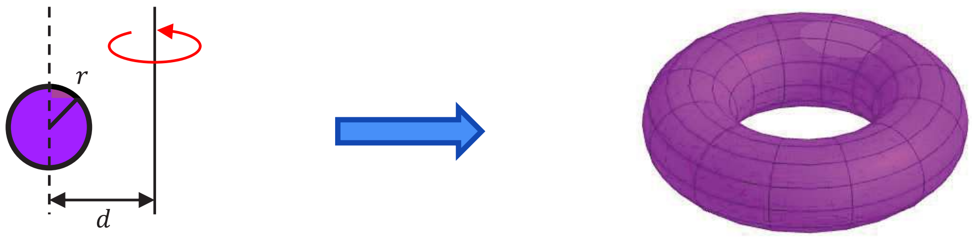
PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

O *princípio de Cavalieri* diz que, dados dois sólidos A e B, se é possível posicioná-los de modo que um plano que se move continuamente se mantendo paralelo à posição inicial sempre determina secções de mesma área em A e B, então seus volumes são iguais.

Uma consequência do princípio de Cavalieri é que o volume de prismas e pirâmides somente dependem da altura e da área da base, e não de sua forma.

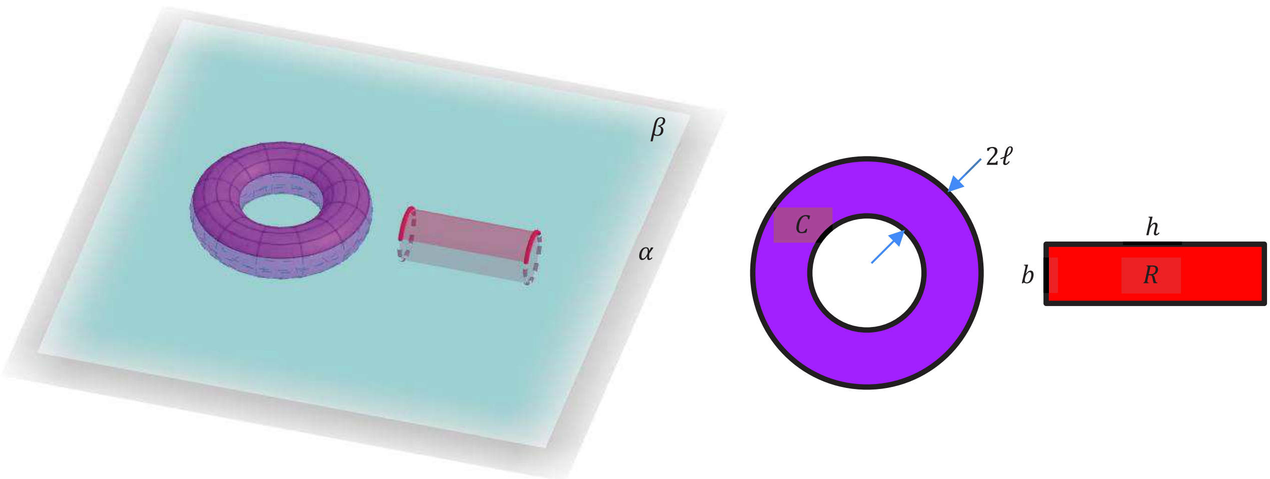


Nesse problema veremos como calcular a área de um *toro*, que é obtido a partir da rotação de um círculo de raio r em torno de um eixo a uma distância $d > r$ de seu centro.



Seja α o plano de simetria do toro, que passa pela circunferência definida pela rotação do centro do círculo em torno do eixo.

Na figura a seguir, temos o toro e um cilindro de base com raio r e altura h cujo eixo está contido em α. Ambos estão seccionados por um plano β paralelo a α, determinando um anel circular C de espessura 2ℓ e um retângulo R de base b e altura h.



a) Se a distância entre os planos α e β é x, calcule ℓ e b em função de x, r e d.

b) Calcule a área desse anel circular C em função de x, r e d.

c) Encontre o valor de h para o qual a área da secção de β no cilindro seja igual à área da secção de β no toro para todo x.

d) Mostre, usando o princípio de Cavalieri, que o volume do toro é $2\pi^2 r^2 d$.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Você já ouviu falar da sequência de Fibonacci? É uma sequência de inteiros em que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores. Em termos matemáticos, a sequência F_n é definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n \geq 3$. Seus nove primeiros termos são:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Os termos da sequência de Fibonacci aparecem em vários lugares e em vários problemas, inclusive em muitas edições da OPM. Neste problema, vamos analisar propriedades dos restos que os termos F_n deixam na divisão por um inteiro fixado.

Pode-se provar que os restos de F_n por m se repetem periodicamente. Isto é equivalente a existir um bloco de T_m restos que se repete. Por exemplo, $T_2 = 3$, pois os restos r_n da divisão de F_n por 2 se repetem de três em três termos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
r_n	1	1	0	1	1	0	1	1	0	...

Observe que, quando obtivemos a repetição dos restos iguais a 1 para o quarto e o quinto termo da sequência, já sabíamos que tínhamos encontrado o período. Cada termo é a soma dos dois anteriores e os termos iniciais são justamente também ambos iguais a 1.

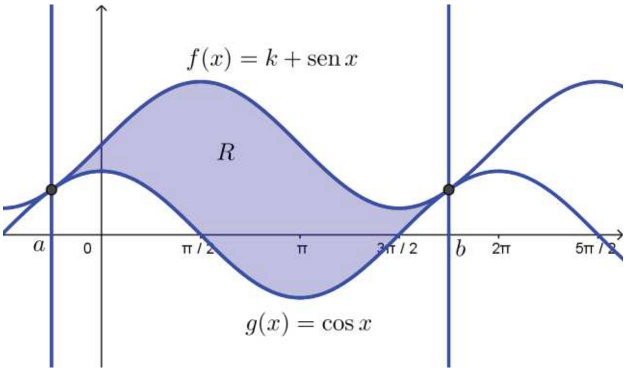
a) Calcule T_3.
b) Determine o resto de F_{2021} na divisão por 3.
c) Copie e preencha a tabela abaixo na sua folha de respostas e conclua que $T_{29} = 14$. *Lembre-se que os restos devem ser os da divisão por* 29.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34							
r_n	1	1														

d) Sabe-se que n^7 só pode deixar restos 0, 1, 12, 17 ou 28 na divisão por 29. Utilizando este fato, prove que não existem inteiros positivos x e y tais que $F_x = y^7 - 77$.

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

A seguir exibimos os gráficos de $f(x) = k + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$, que são tangentes. Exibimos dois pontos consecutivos de tangência, com abscissas $a < 0 < b$.

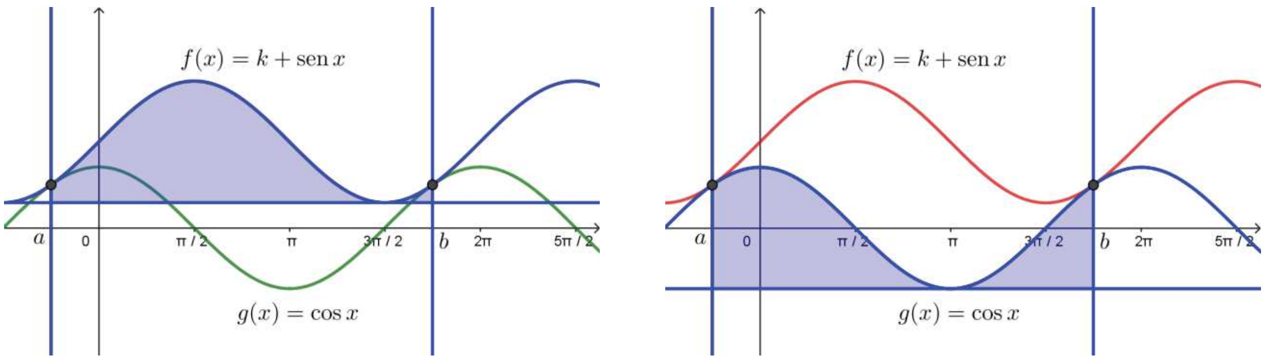


a) O valor de k é o menor real tal que $f(x) \geq g(x)$ para todo x real. Calcule k.

Dica: você pode querer utilizar a expressão de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ *em função de* $\cos x$ *e* $\operatorname{sen} x$.

b) Calcule a e b.

Vamos calcular a área da região R sombreada na figura inicial, que lembra o mapa do estado de São Paulo.



c) Na figura acima, à esquerda sombreamos a área abaixo do gráfico de $y = f(x)$ e acima de $y = m$, em que m é o valor mínimo de $f(x)$; à direita, sombreamos a área abaixo do gráfico de $y = g(x)$ e acima de $y = -1$, que é o valor mínimo de $g(x)$. Explique por que essas duas áreas são iguais.

d) Usando o item c, calcule a área de R.

PROBLEMA 5 – $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

O *polinômio interpolador de Lagrange* nos permite encontrar um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a $n-1$ (ou o polinômio identicamente nulo) dados os valores de $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$:

$$p(x)=\prod_{j\neq 1}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}p(x_1)+\prod_{j\neq 2}\frac{x-x_j}{x_2-x_j}p(x_2)+\cdots+\prod_{j\neq n}\frac{x-x_j}{x_n-x_j}p(x_n).$$

Por exemplo, para $n=4$,

$$p(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}p(x_1)+\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}p(x_2)+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}p(x_3)$$
$$+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}p(x_4).$$

Observe que temos, de fato,

$$p(x_1)=\frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}p(x_1)+\frac{(x_1-x_1)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}p(x_2)+\frac{(x_1-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}p(x_3)$$
$$+\frac{(x_1-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}p(x_4)$$

"Abrindo" a conta, obtemos $p(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$.

a) Considere um polinômio de grau menor do que 5 tal que $p(0)=1$, $p(1)=3$, $p(2)=9$, $p(3)=27$ e $p(4)=81$. Calcule $p(5)$.

Resolvendo o item a, você deve ter percebido que a fórmula dada não fornece os coeficientes diretamente e isso pode ser um complicador do uso de tal polinômio. Nos próximos itens, aprenderemos uma maneira de determinar diretamente os coeficientes do polinômio interpolador de Lagrange utilizando matrizes e determinantes.

A *matriz de Vandermonde* é uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ cujo elemento a_{ij} é igual a x_i^{j-1}, dados x_1, x_2, ..., x_n. Por exemplo, se A é uma matriz de Vandermonde 4×4,

$$A=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3\\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3\\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3\end{bmatrix}.$$

Pode-se demonstrar que o determinante de uma matriz de Vandermonde é igual a

$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i).$$

No exemplo acima, teríamos

$$\det(A)=\prod_{1\leq i<j\leq 4}(x_j-x_i)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3).$$

Considere que tenham sido dados os valores de $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$. Seja, então, A a matriz de Vandermonde $n\times n$ com $a_{ij}=x_i^{j-1}$.

b) Justifique por que $Ax=b$, sendo $x=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix}p(x_1)\\ p(x_2)\\ \vdots\\ p(x_n)\end{bmatrix}$.

c) Determine o termo independente do polinômio interpolador de Lagrange que obtemos para os valores $p(-1)=1$, $p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(3)=3$ e $p(4)=5$.

Dica: Você pode desejar utilizar a *Regra de Cramer*. No caso específico deste item, ao considerarmos o sistema linear $Ax=b$:

$$a_0=\frac{\begin{vmatrix}p(x_1) & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4\\ p(x_2) & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4\\ p(x_3) & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4\\ p(x_4) & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4\\ p(x_5) & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4\end{vmatrix}}{\det(A)}$$

PROBLEMA 6 – $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

Os playoffs do Campeonato Paulista de Opmbol (uma variação do quadribol) serão disputados pelos *Borá Simpáticos* contra os *Flora Rica Legais*. Arnaldo é torcedor dos Simpáticos e Bernaldo é torcedor dos Legais. A final será em melhor de sete jogos, ou seja, a primeira equipe a vencer 4 jogos será a campeã. Não há empates no opmbol.

Como os Simpáticos fizeram melhor campanha na temporada regular, eles terão a vantagem de fazer os dois primeiros jogos e os dois últimos (se algum for necessário) em Borá. Os jogos 3, 4 e 5 (se necessário) serão em Flora Rica.

Arnaldo e Bernaldo estarão em um retiro espiritual no Tibete até o final da série de jogos. Suponha que um monge bondoso (como todos os monges) conte para eles que leu no site do New York Times que a série terminou no sexto jogo. Infelizmente, ele não lembra o nome do campeão. Considerando que Arnaldo e Bernaldo têm um ótimo conhecimento de Probabilidades, iremos descobrir qual deles irá ficar mais feliz com tal informação. Nesse problema suponha que ambos os times quando jogam em casa tenham uma probabilidade p fixada, $0{,}5 < p < 1$, de vencer.
a) Mostre que se a série terminar antes do sexto jogo, ou seja, em quatro ou cinco jogos, Flora Rica tem maior probabilidade de ser campeã.
b) Determine quem ficaria mais feliz com a informação do monge: Arnaldo ou Bernaldo? Nenhum dos dois? *Não se esqueça de justificar sua resposta.*

Para o campeonato do ano que vem está sendo considerada uma melhor de 11 jogos e há uma grande discussão de quais dos jogos devem ser na casa do time de melhor campanha. Serão 6 jogos ao todo na casa deste time, mas é preciso definir quais dentre os 11. Com relação a probabilidade de cada time ser campeão, essa discussão faz sentido? Na verdade, não.
c) Mostre que a ordem dos jogos dos playoffs não influencia as chances de cada time ser campeão. Lembre-se que estamos supondo que cada time, quando joga em casa, tem uma probabilidade p fixada, $0{,}5 < p < 1$, de vencer.
Dica: você pode considerar para efeito de cálculo que todos os 11 jogos são disputados mesmo que um time atinja 6 vitórias antes do 11º jogo. Caso você decida usar essa dica, você deve justificá-la na sua resolução.

Uma forma de entender melhor a importância da ordem dos jogos nos playoffs é o conceito de *esperança*. Neste caso, uma estimativa de em quantas partidas os playoffs irão terminar. Para simplificar as contas, vamos considerar uma melhor de três jogos. O time de melhor campanha joga duas partidas em casa. Sendo C o time de melhor campanha jogar em casa e F jogar na casa de seu adversário, as possibilidades para os playoffs são CCF, CFC e FCC.
d) Determine em função de p, definido acima, o número esperado de jogos dos playoffs, isto é,

$$2 \cdot \text{probabilidade de terminar em 2 jogos} + 3 \cdot \text{probabilidade de terminar em 3 jogos}$$

para cada uma das possibilidades das três possibilidades de distribuição dos jogos mostradas acima.
e) Prove que o menor número esperado de jogos é obtido no caso CCF.

PROBLEMA 7 – $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

Considere os números inteiros e separe-os em trechos de inteiros consecutivos. Por exemplo, separamos de três em três:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...

Em seguida, eliminamos o último número de cada trecho e escrevemos, na linha seguinte, as somas parciais: 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 2 + 4 + 5 = 12$, e assim por diante:

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16	17	~~18~~	...
1	3		7	12		19	27		37	48		61	75		91	108		

Repetimos o procedimento, ou seja, eliminamos o último número da segunda linha de cada trecho e obtemos uma terceira linha com as somas parciais 1, $1 + 7 = 8$, $1 + 7 + 19 = 27$, e assim por diante:

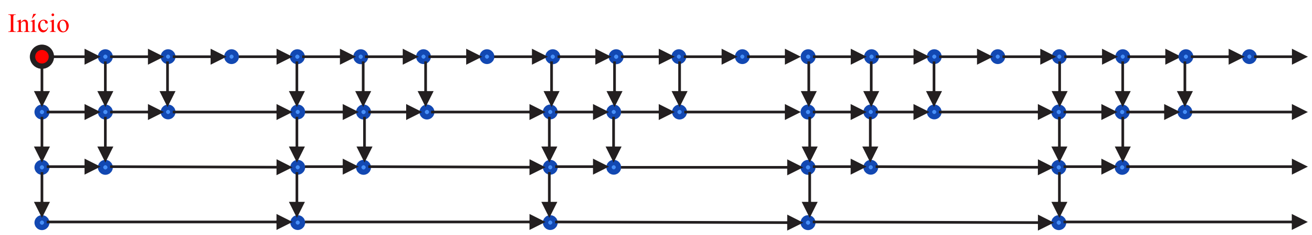
1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16	17	~~18~~	...
1	~~3~~		7	~~12~~		19	~~27~~		37	~~48~~		61	~~75~~		91	~~108~~		
1			8			27			64			125			216			

Paramos agora que só temos um número em cada parte. Você os reconhece? Sim! São os cubos perfeitos $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ ...

a) Faça o mesmo procedimento agora separando os números de cinco em cinco. Faça a conta com os números de 1 a 20. *Você deve obter na última linha as potências quintas* $1^5 = 1$, $2^5 = 32$, $3^5 = 243$ *e* $4^5 = 1024$.

Notou o padrão? Esse é o chamado *milagre de Moessner*, descoberto por Alfred Moessner em 1951. A solução que exibiremos a seguir é brilhantemente ilustrada por Burkard Polster em seu canal do YouTube Mathologer.

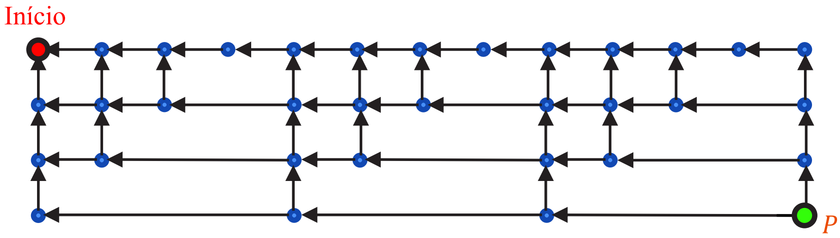
Considere os pontos a seguir. A linha superior, que chamaremos de *linha zero*, temos pontos igualmente espaçados. Na linha seguinte, a *primeira linha*, tiramos pontos da linha zero de modo que sobrem pontos agrupados da mesma forma que os números, e nas próximas linhas eliminamos pontos da mesma forma que os números. Finalmente, pontos são ligados por flechas para a direita e para baixo, e destacamos o ponto superior esquerdo, que chamaremos doravante de *início*. Representamos a divisão de três em três a seguir.



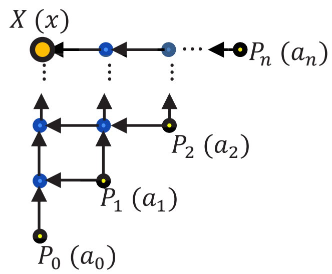
Considere um ponto P qualquer, e considere a quantidade de caminhos do início a P usando as flechas. Note que se há a caminhos do início ao ponto vizinho à esquerda de P e b caminhos do início ao ponto vizinho acima de P, então há $a + b$ caminhos do início a P.

b) Mostre que a quantidade de caminhos a cada ponto em toda linha abaixo da linha zero é igual ao número na conta correspondente ao milagre de Moessner.

É claro que a quantidade de caminhos do início a um ponto P qualquer é igual ao número de caminhos de P ao início revertendo as flechas. Vamos contar esses caminhos.



Suponha que as quantidades de maneiras de chegar aos pontos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ são respectivamente $a_0, a_1, \dots, a_n$, como mostra a figura. Nela, há $n + 1$ pontos na linha 0, n pontos na linha 1, até 2 pontos na linha $n - 1$ e 1 ponto na linha n.



c) Prove que a quantidade de maneiras de chegar ao ponto X começando a partir de algum dos pontos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ é

$$x = \binom{n}{0} a_0 + \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 + \cdots + \binom{n}{n} a_n.$$

Você pode querer usar o fato de que o número de caminhos em que se vai para cima k vezes e para a esquerda ℓ vezes é igual à quantidade de anagramas com k $\uparrow$'s e ℓ $\leftarrow$'s, que é $\frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} = \binom{k+\ell}{\ell}$.

d) Mostre que o milagre de Moessner vale para o caso em que os trechos são de cinco números, ou seja, que geramos as potências quintas.

Você pode querer usar o binômio de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n.$$

e) O milagre de Moessner também dá certo se os trechos têm tamanhos diferentes: por exemplo, se eles têm tamanhos 1, 2, 3, ... obtemos 1, 2, 6, 24, 120, ... (os números finais são riscados na hora de montar a próxima linha). Desta vez, a quantidade de linhas é infinita.

~~1~~	2 ~~3~~	4 5 ~~6~~	7 8 9 ~~10~~	11 12 13 14 ~~15~~	...
	~~2~~	6 ~~11~~	18 26 ~~35~~	46 58 71 ~~85~~	
		~~6~~	24 ~~50~~	96 154 ~~225~~	
			~~24~~	120 ~~274~~	
				~~120~~	

Prove que o número obtido no n-ésimo trecho é $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

f) Quantos números há em cada trecho se o número obtido no n-ésimo trecho é $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$? Por exemplo, $5!! = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ e $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$. *Justifique sua resposta!*