XLV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2021)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Durante os Jogos Olímpicos de Tóquio, como de costume, acompanhamos o quadro de medalhas. Em geral, a classificação é feita por quantidade de medalhas de ouro, usando como critério de desempate a quantidade de medalhas de prata e, em seguida, a quantidade de medalhas de bronze. De acordo com essa classificação, os dez primeiros países são:

País	Ouro	Prata	Bronze	Total
EUA	39	41	33	113
China	38	32	18	88
Japão	27	14	17	58
Reino Unido	22	21	22	65
Comitê Olímpico Russo	20	28	23	71
Austrália	17	7	22	46
Países Baixos	10	12	14	36
França	10	12	11	33
Alemanha	10	11	16	37
Itália	10	10	20	40

Todavia, houve uma série de reportagens considerando classificações alternativas. Uma foi o total de medalhas, em que se observa, por exemplo, uma troca de ordem entre a terceira, a quarta e a quinta posições.

Outras possibilidades são discutidas pelo economista David Forrest, do Reino Unido, que pesquisa previsões para os Jogos Olímpicos. Uma é por população, que se baseia no argumento de que países mais populosos têm mais chance de terem mais atletas de nível olímpico. O website *Medals per capita* também usa um sistema de pesos nas medalhas, em que ouro tem peso 4, prata tem peso 2 e bronze tem peso 1. Por exemplo, a pontuação dos EUA nesse sistema é $39 \cdot 4 + 41 \cdot 2 + 33 \cdot 1 = 271$. Para classificar os países de acordo com população, divide-se a população pela pontuação, e valores *menores* indicam classificação melhores. Usando esse critério, os países de menor população são privilegiados, com San Marino em primeiro com 8482 habitantes por ponto, Bermudas em segundo com 15979 habitantes por ponto e Bahamas em terceiro com 49155 habitantes por ponto.

Outra possibilidade apontada pelo website *Medals per capita* é o Produto Interno Bruto (PIB), que mede a riqueza de cada país. A conta é quase a mesma: dividimos o PIB (em bilhões de dólares) pela pontuação, e valores menores são melhores. Nesse caso, os três primeiros são San Marino com 0,41 bilhão de dólares por ponto, Jamaica com 0,67 bilhão de dólares por ponto e Geórgia com 0,79 bilhão de dólares por ponto.

A tabela a seguir exibe os dados pertinentes para três países: os EUA, o Brasil e o país sede, o Japão.

País	Ouro	Prata	Bronze	População (milhões)	PIB (bilhões)
EUA	39	41	33	331,0	19485
Brasil	7	6	8	212,6	2054
Japão	27	14	17	126,5	4872

a) Calcule a pontuação de cada país com peso 4 para ouro, peso 2 para prata e peso 1 para bronze.

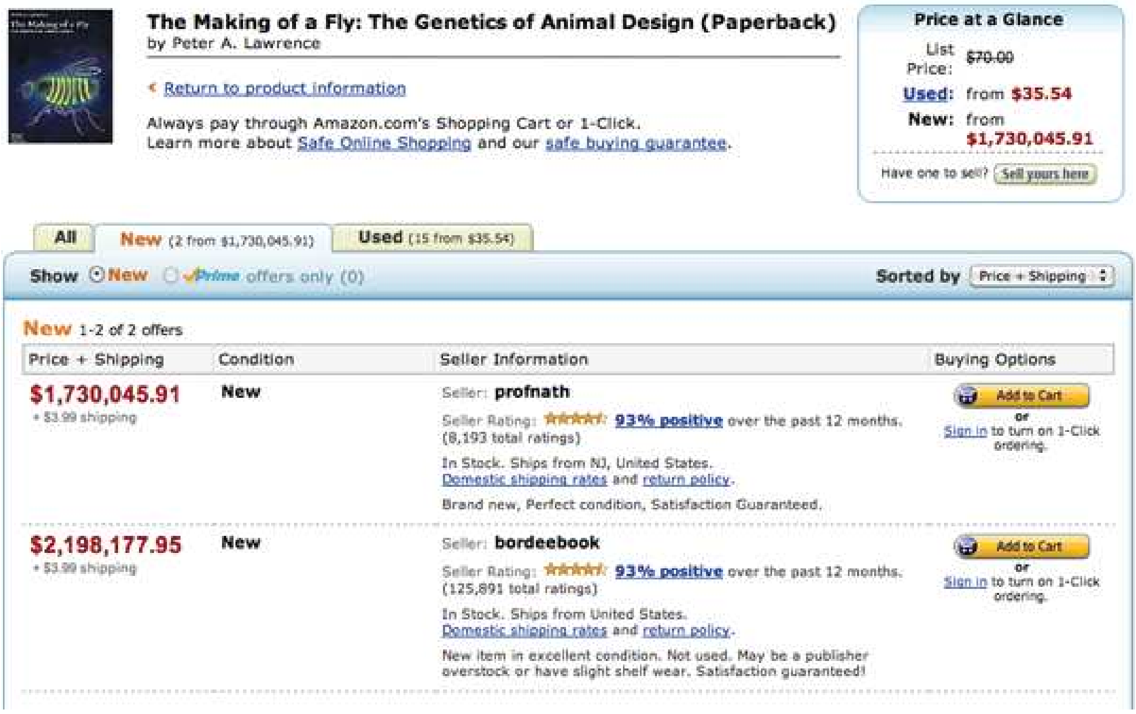
b) Calcule a população por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor.

c) Calcule o PIB por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor.

d) David Forrest propõe também considerar a *renda per capita*, que é o PIB dividido pela população. Calcule a renda per capita por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor. Nesse caso, também é melhor ter valores menores.

PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

O pesquisador e biólogo Michael Eisen relatou uma história muito curiosa no seu blog "it is NOT junk" (https://www.michaeleisen.org/blog/). Ao pesquisar sobre o livro *The Making of a Fly* no site Amazon.com, ele encontrou duas opções para comprar o livro novo (imagem a seguir) custando 1.730.045,91 e 2.198.177,95 dólares, além de 3,99 dólares de envio (isso mesmo, não tinha frete grátis).



a) Com o valor cobrado por profnath, seria possível pagar os fretes individuais de 3,99 dólares de quantos livros?

Por melhor que fosse o livro, Michael não acreditou que os dois vendedores esperassem vender por aquele preço e começou a acompanhar os valores para tentar descobrir o que estava acontecendo. Michael notou que todos os dias o vendedor profnath atualizava o seu preço para 0,9983 do preço de bordeebook. Segundo Michael faria sentido ter o livro e tentar vender um pouco mais barato que o maior preço disponível. Algumas horas depois o vendedor bordeebook aumentava o seu preço para 1,270589 do preço de profnath. Para Michael isso poderia significar que bordeebook não tinha o produto e se alguém fizesse o pedido, o livro seria comprado do outro vendedor e bordeebook lucraria com a diferença de preços. Provavelmente esses preços eram atualizados automaticamente através de algoritmos e programas desses vendedores.

b) A partir das informações fornecidas, qual foi aproximadamente o aumento percentual diário do preço do livro do vendedor profnath? Considere que a cada dia há exatamente uma alteração do preço de cada vendedor.

c) Michael acompanhou os preços durante 10 dias. Estime qual foi o maior preço que chegou a custar o livro do vendedor profnath.

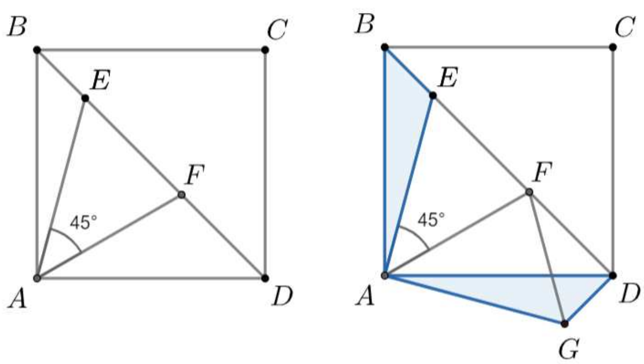
No final das contas, Michael reporta que o preço de profnath caiu para apenas 106,23 dólares e foi seguido pelo preço de bordeebook que baixou para 134,97 dólares. Esse livro novo não está mais disponível no site da Amazon.com. (Depois desse descontão, né?)

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Existem muitos resultados interessantes envolvendo construções geométricas com quadrados. Nesse problema veremos (e demonstraremos) mais um deles.

Sejam os pontos E e F sobre a diagonal $\overline{BD}$ de modo que $m(E\hat{A}F) = 45^\circ$ e E sobre o segmento $\overline{BF}$, como na figura na esquerda; então $BE^2 + FD^2 = EF^2$.

Para a nossa demonstração, vamos considerar, na figura da direita, o triângulo ADG obtido com uma rotação de 90° no sentido horário do triângulo ABE em torno do ponto A.



a) Prove que $m(F\hat{A}G) = 45°$.

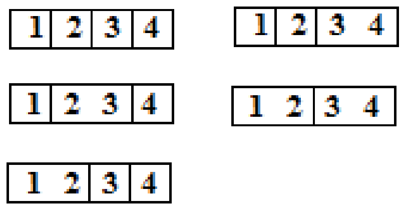
b) Prove que os triângulos EAF e GAF são congruentes e conclua que $EF = GF$.

c) Prove que $m(F\hat{D}G) = 90°$.

d) Conclua a demonstração do resultado apresentado, ou seja, prove que $BE^2 + FD^2 = EF^2$.

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Considere uma linha formada por n quadrados unitários (de lado 1). Iremos cobrir tal linha com peças que são quadrados unitários ou dominós 1×2. Tal cobertura deve ser completa, ou seja, nenhum quadrado pode ficar sem uma peça sobre ele; e sem sobreposições, ou seja, não podemos colocar uma peça sobre outra. Por exemplo, apresentamos a seguir as 5 maneiras de cobrir uma linha formada por quatro quadrados unitários:

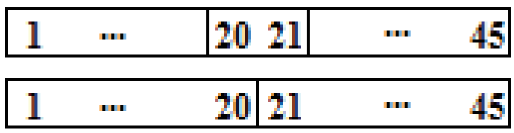


a) Apresente na sua folha de respostas as 8 maneiras de cobrir uma linha formada por cinco quadrados unitários.

Sendo R_n o número de maneiras de cobrir uma linha formada por n quadrados unitários com quadrados unitários ou dominós, verifica-se que $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$, $R_4 = 5$ e $R_5 = 8$. Quem viu (ou verá) a questão da sequência de Fibonacci nesta prova deve estar muito desconfiado! De fato, como $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$, temos $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ e $F_6 = 8$. Assim, temos tudo para imaginar que $R_n = F_{n+1}$.

b) Considerando que a última peça colocada ao cobrirmos a linha com n quadrados unitários é um quadrado ou um dominó, justifique por que $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$, para $n \geq 3$, e conclua que $R_n = F_{n+1}$.

c) Considere uma linha formada por 45 quadrados unitários e observe a fronteira entre o seu 20º e o seu 21º quadrado. Ela pode ser coberta por um dominó ou não. Veja as figuras abaixo. Vale destacar que estamos considerando apenas a fronteira entre os quadrados 20 e 21.



A partir dessa ideia, justifique por que podemos concluir que $F_{46} = F_{21}F_{26} + F_{20}F_{25}$.

PROBLEMA 5 – Valor: 3 pontos

Você já ouviu falar da sequência de Fibonacci? É uma sequência de inteiros em que cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores. Em termos matemáticos, a sequência F_n é definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n \geq 3$. Seus nove primeiros termos são:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34

Os termos da sequência de Fibonacci aparecem em vários lugares e em vários problemas, inclusive em muitas edições da OPM. Neste problema, vamos analisar propriedades dos restos que os termos F_n deixam na divisão por um inteiro fixado.

Pode-se provar que os restos de F_n por m se repetem periodicamente. Isto é equivalente a existir um bloco de T_m restos que se repete. Por exemplo, $T_2 = 3$, pois os restos r_n da divisão de F_n por 2 se repetem de três em três termos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
r_n	1	1	0	1	1	0	1	1	0	...

Observe que, quando obtivemos a repetição dos restos iguais a 1 para o quarto e o quinto termo da sequência, já sabíamos que tínhamos encontrado o período. Cada termo é a soma dos dois anteriores e os termos iniciais são justamente também ambos iguais a 1.

a) Calcule T_3.

b) Determine o resto de F_{2021} na divisão por 3.

c) Copie e preencha a tabela abaixo na sua folha de respostas e conclua que $T_{29} = 14$. *Lembre-se que os restos devem ser os da divisão por* 29.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34							
r_n	1	1														

d) Sabe-se que n^7 só pode deixar restos 0, 1, 12, 17 ou 28 na divisão por 29. Utilizando este fato, prove que não existem inteiros positivos x e y tais que $F_x = y^7 - 77$.

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Arnaldo e Bernaldo brincam de um jogo de esconder diferente.

Há dezessete caixinhas, numeradas de 1 a 17, colocadas em linha. Inicialmente, Bernaldo esconde uma bala em uma delas. Arnaldo deseja encontrar a bala e Bernaldo tenta fazer que isso demore o maior número de rodadas possível.

A cada rodada, Arnaldo escolhe duas das caixinhas. Se a bala estiver em uma delas, o jogo acabou. Se não estiver, Bernaldo deve, sem Arnaldo ver (é claro!), trocar a bala de caixinha. Ele deve colocá-la em uma vizinha daquela em que a bala estava. Por exemplo, se a bala estava na caixinha 4, ela pode ser colocada na 3 ou na 5. Se estava na caixinha 17, tem de ser colocada na 16, e se estava na caixinha 1, tem de ser colocada na caixinha 2. Arnaldo pode escolher suas caixinhas como quiser, ou seja, não há regras para suas escolhas.

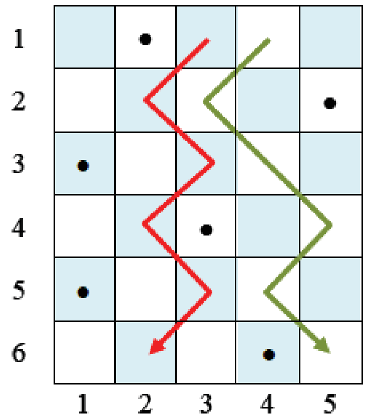
Como Arnaldo não recebe nenhuma informação de Bernaldo durante o jogo, exceto errou/acertou, podemos supor que Arnaldo faz todas as tentativas logo no começo da partida. Isso irá simplificar a análise.

Como a ordem em que elas ocorrem faz diferença, as representaremos por uma sequência de pares.

a) Mostre que se as tentativas de Arnaldo são $t_1 = \{1,2\}; t_2 = \{2,3\}; t_3 = \{3,4\}; \dots ; t_{16} = \{16,17\}$, ele vence o jogo em, no máximo, 16 rodadas.

Para podermos entender a situação melhor, considere o caso mais simples em que Arnaldo escolhe apenas uma caixa por rodada e sejam apenas 5 caixas.

Visando uma modelagem mais adequada do jogo, vamos representar as tentativas de Arnaldo no "tabuleiro" quadriculado mostrado a seguir em que as colunas indicam as caixinhas e as linhas indicam a ordem em que as tentativas são feitas. No exemplo a seguir, Arnaldo escolhe as caixas 2, 5, 1, 3, 1 e 4, nessa ordem. Essas tentativas não garantem a vitória de Arnaldo. De fato, Bernaldo poderia, por exemplo, mover a bala nas caixas $4 \to 3 \to 4 \to 5 \to 4 \to 5$, como representado na linha verde da direita, ou alternar entre as caixas 3 e 2, fazendo $3 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3 \to 2$, como representado na linha vermelha da esquerda.



Para os itens b e d a seguir, suponha que Arnaldo pode escolher apenas uma caixinha por rodada.

b) Apresente uma sequência que vença em 6 rodadas, no máximo. Ou seja, apresente uma sequência de jogadas que, não importando as decisões de Bernaldo, encontre a bala.

c) Prove que, em uma solução do jogo – seja na versão com duas escolhas ou com uma só escolha – as tentativas de Arnaldo ao serem representadas no tabuleiro não deixarão duas colunas adjacentes vazias.

d) Mostre que não é possível garantir uma vitória para o jogo com uma escolha e 5 caixinhas em 5 rodadas.

Vamos voltar ao jogo original agora!

e) Apresente uma solução em no máximo 10 rodadas. Você pode desenhar um tabuleiro na sua folha de respostas. *Não se esqueça de que a sua resposta deve ser justificada.*

Será que é possível obter uma solução para 9 rodadas? Veremos nos próximos itens que a resposta é *não*.

Chamamos as $9 \cdot 2 = 18$ casas do tabuleiro correspondentes às escolhas de Arnaldo de *casas marcadas*. Considere a cor que aparece menos entre as casas marcadas; podemos supor que essa cor é azul. Sejam $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ os números das colunas, não necessariamente distintas, das casas azuis marcadas. Vamos adicionar $a_0 = 0$ e $a_{n+1} = 18$ nesta sequência para cobrir os casos que envolvem as bordas do tabuleiro.

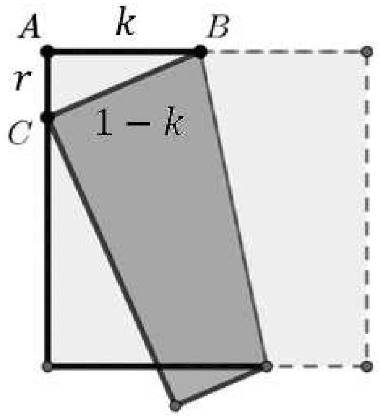
f) Explique por que se $a_i \geq a_{i-1} + 3$ para algum i então não se garante que Arnaldo encontre a bala. Não se esqueça que só estamos considerando casas marcadas azuis.

A partir daqui vamos supor que $a_i \leq a_{i-1} + 2$ para $2 \leq i \leq n$, e mostraremos que existe uma coluna j que satisfaz às seguintes condições: (I) há exatamente uma casa azul marcada nessa coluna (ou seja, $j = a_k$ para um valor único de k) e (II) não há casas azuis marcadas nas colunas $j - 1$ e $j + 1$.

g) Mostre que se tal coluna j não existe, então $a_{i+1} \leq a_{i-1} + 3$ para $2 \leq i \leq n - 1$. Em seguida, mostre que $a_n \leq 14$ e conclua que a coluna j existe.

h) Complete a demonstração e mostre que não é possível garantir que que a bala será encontrada em 9 rodadas. Ou seja, não importando quais sejam as escolhas de Arnaldo, existe uma maneira de Bernaldo ir mudando a bala de caixinha e ela nunca ser achada.

PROBLEMA 7 – Valor: 4 pontos
Diremos que um triângulo retângulo com lados de medidas inteiras x, y e z *pode ser obtido por dobradura*, se existe um r racional, $0 < r < 1$, tal que, dobrando um quadrado de lado 1 como na figura a seguir, obtemos um triângulo retângulo semelhante ao de lados x, y e z.



a) Tomando $r = \frac{4}{3+5} = \frac{1}{2}$, mostre que o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 pode ser obtido por dobradura.
b) Tomando $r = \frac{12}{5+13} = \frac{2}{3}$, mostre que o triângulo retângulo de lados 5, 12 e 13 pode ser obtido por dobradura.
c) Mostre que o triângulo retângulo de lados 28, 45 e 53 pode ser obtido por dobradura.
d) Prove que todos os triângulos retângulos com lados de medidas inteiras podem ser obtidos por dobradura.
e) Mostre que cada triângulo retângulo com lados de medidas inteiras é obtido por dobradura para exatamente dois valores distintos de r.
f) Sejam a e b inteiros positivos com $a < b$. Supondo que um triângulo retângulo é obtido por dobradura para $r_1 = \frac{a}{b}$, prove que ele também é obtido para $r_2 = \frac{b-a}{b+a}$.
g) Uma *terna pitagórica* é uma tripla ordenada (x, y, z) formada por três inteiros positivos tais que $x^2 + y^2 = z^2$. Dizemos que uma terna pitagórica (x, y, z) é *primitiva* se, e somente se, $\mathrm{mdc}(x, y, z) = 1$. Utilizando os itens anteriores, demonstre que toda terna pitagórica primitiva pode ser escrita na forma $(b^2 - a^2, 2ab, b^2 + a^2)$ em que a e b são inteiros positivos com $a < b$, $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ e a e b têm paridades diferentes (ou seja, um é par e o outro é ímpar).