XLV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2021)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas à mão, a tinta ou a lápis. Soluções digitadas em computador, por exemplo, não serão aceitas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – $\boxed{\text{Valor: 2 pontos}}$

Durante os Jogos Olímpicos de Tóquio, como de costume, acompanhamos o quadro de medalhas. Em geral, a classificação é feita por quantidade de medalhas de ouro, usando como critério de desempate a quantidade de medalhas de prata e, em seguida, a quantidade de medalhas de bronze. De acordo com essa classificação, os dez primeiros países são:

País	Ouro	Prata	Bronze	Total
EUA	39	41	33	113
China	38	32	18	88
Japão	27	14	17	58
Reino Unido	22	21	22	65
Comitê Olímpico Russo	20	28	23	71
Austrália	17	7	22	46
Países Baixos	10	12	14	36
França	10	12	11	33
Alemanha	10	11	16	37
Itália	10	10	20	40

Todavia, houve uma série de reportagens considerando classificações alternativas. Uma foi o total de medalhas, em que se observa, por exemplo, uma troca de ordem entre a terceira, a quarta e a quinta posições.

Outras possibilidades são discutidas pelo economista David Forrest, do Reino Unido, que pesquisa previsões para os Jogos Olímpicos. Uma é por população, que se baseia no argumento de que países mais populosos têm mais chance de terem mais atletas de nível olímpico. O website *Medals per capita* também usa um sistema de pesos nas medalhas, em que ouro tem peso 4, prata tem peso 2 e bronze tem peso 1. Por exemplo, a pontuação dos EUA nesse sistema é $39 \cdot 4 + 41 \cdot 2 + 33 \cdot 1 = 271$. Para classificar os países de acordo com população, divide-se a população pela pontuação, e valores *menores* indicam classificação melhores. Usando esse critério, os países de menor população são privilegiados, com San Marino em primeiro com 8482 habitantes por ponto, Bermudas em segundo com 15979 habitantes por ponto e Bahamas em terceiro com 49155 habitantes por ponto.

Outra possibilidade apontada pelo website *Medals per capita* é o Produto Interno Bruto (PIB), que mede a riqueza de cada país. A conta é quase a mesma: dividimos o PIB (em bilhões de dólares) pela pontuação, e valores menores são melhores. Nesse caso, os três primeiros são San Marino com $0{,}41$ bilhão de dólares por ponto, Jamaica com $0{,}67$ bilhão de dólares por ponto e Geórgia com $0{,}79$ bilhão de dólares por ponto.

A tabela a seguir exibe os dados pertinentes para três países: os EUA, o Brasil e o país sede, o Japão.

País	Ouro	Prata	Bronze	População (milhões)	PIB (bilhões)
EUA	39	41	33	331,0	19485
Brasil	7	6	8	212,6	2054
Japão	27	14	17	126,5	4872

a) Calcule a pontuação de cada país com peso 4 para ouro, peso 2 para prata e peso 1 para bronze.

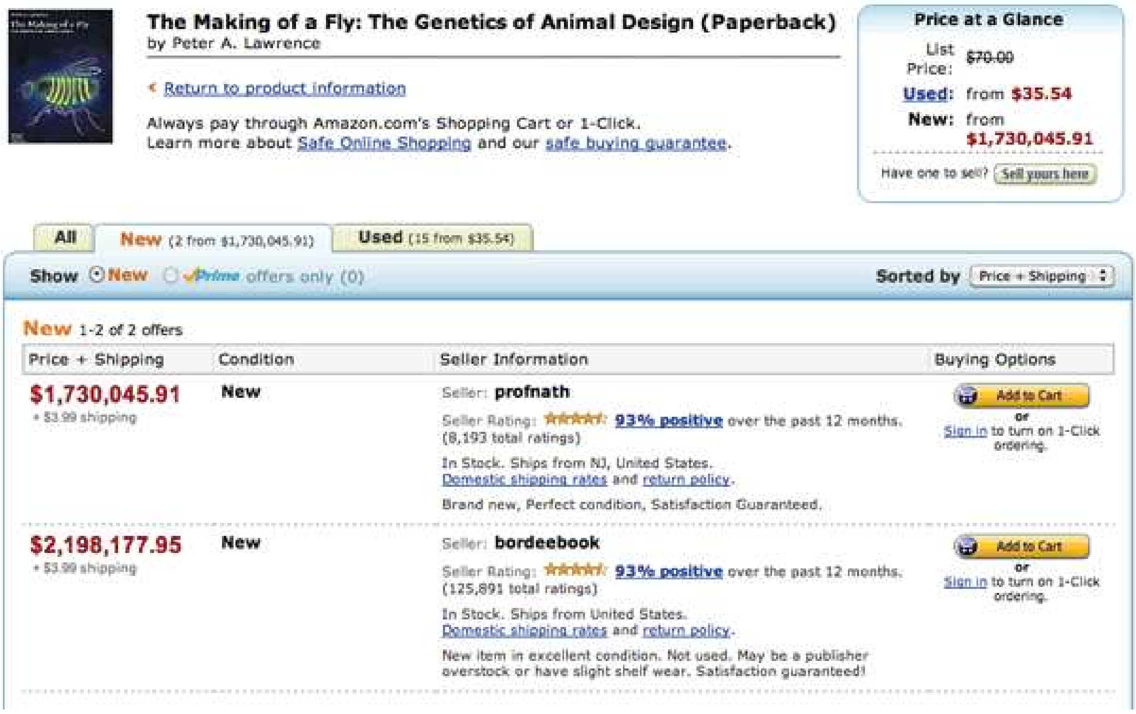
b) Calcule a população por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor.

c) Calcule o PIB por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor.

d) David Forrest propõe também considerar a *renda per capita*, que é o PIB dividido pela população. Calcule a renda per capita por ponto e classifique os três países de acordo com esse valor. Nesse caso, também é melhor ter valores menores.

PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

O pesquisador e biólogo Michael Eisen relatou uma história muito curiosa no seu blog “it is NOT junk” (https://www.michaeleisen.org/blog/). Ao pesquisar sobre o livro *The Making of a Fly* no site Amazon.com, ele encontrou duas opções para comprar o livro novo (imagem a seguir) custando 1.730.045,91 e 2.198.177,95 dólares, além de 3,99 dólares de envio (isso mesmo, não tinha frete grátis).



a) Com o valor cobrado por profnath, seria possível pagar os fretes individuais de 3,99 dólares de quantos livros?

Por melhor que fosse o livro, Michael não acreditou que os dois vendedores esperassem vender por aquele preço e começou a acompanhar os valores para tentar descobrir o que estava acontecendo. Michael notou que todos os dias o vendedor profnath atualizava o seu preço para 0,9983 do preço de bordeebook. Segundo Michael faria sentido ter o livro e tentar vender um pouco mais barato que o maior preço disponível. Algumas horas depois o vendedor bordeebook aumentava o seu preço para 1,270589 do preço de profnath. Para Michael isso poderia significar que bordeebook não tinha o produto e se alguém fizesse o pedido, o livro seria comprado do outro vendedor e bordeebook lucraria com a diferença de preços. Provavelmente esses preços eram atualizados automaticamente através de algoritmos e programas desses vendedores.

b) A partir das informações fornecidas, qual foi aproximadamente o aumento percentual diário do preço do livro do vendedor profnath? Considere que a cada dia há exatamente uma alteração do preço de cada vendedor.

c) Michael acompanhou os preços durante 10 dias. Estime qual foi o maior preço que chegou a custar o livro do vendedor profnath.

No final das contas, Michael reporta que o preço de profnath caiu para apenas 106,23 dólares e foi seguido pelo preço de bordeebook que baixou para 134,97 dólares. Esse livro novo não está mais disponível no site da Amazon.com. (Depois desse descontão, né?)

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

João e Maria são dois irmãos que gostam de participar de corridas de rua. João corre com velocidade constante de 1 km a cada 6 minutos e Maria corre com velocidade variável, alternando entre uma velocidade constante maior por 500m e outra velocidade constante menor por 500m, mas na qual cada 1 km é percorrido em exatamente 6 minutos e 0,5 segundo. Isso significa que os três tempos de Maria nos trechos de 0km a 1km, de 2,3 km a 3,3 km e de 9,6 km a 10,6 km são todos iguais a 6 minutos e 0,5 segundo. Dependendo da corrida, Maria pode ter velocidades maior e menor diferentes, mas sempre demora 6 minutos e 0,5 segundo para percorrer 1 km.

a) Considerando uma corrida de rua de 10 km e que os irmãos correm nos ritmos descritos no enunciado, quanto tempo cada um deles demora para completar a prova?

b) Se Maria levar 3 minutos e 20 segundos para percorrer 500 m na velocidade constante menor entre as duas velocidades constantes que ela fica alternando, quais são, aproximadamente, as duas velocidades constantes (em metros por minuto) que Maria fica alternando durante a corrida?

Maria e João vão correr as 10 milhas de Morretes no Paraná. Suponha que 10 milhas são 16,1 km.

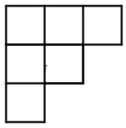
c) Considerando o ritmo descrito no enunciado, quanto tempo João demora para completar as 10 milhas de Morretes?

d) Se Maria começar com a menor velocidade nos primeiros 500 m da prova e seguir alternando como descrito no enunciado, então ela certamente terminará a prova depois de João. Por que podemos concluir isto?

e) Suponha que Maria começa com o ritmo rápido nos primeiros 500 m e segue alternando como o descrito no enunciado. Apesar de Maria ter velocidade menor do que João em todo trecho de 1 km, ela ainda consegue vencer a corrida! Qual deve ser a velocidade aproximada de Maria (em metros por minuto) no ritmo mais rápido para que Maria termine a prova 4 segundos antes que João?

PROBLEMA 4 – $\boxed{\text{Valor: 3 pontos}}$

Uma escadinha de tamanho n é uma figura formada por quadradinhos em que há n quadradinhos na primeira linha, $n-1$ quadradinhos na segunda e assim por diante até 1 quadradinho na linha n e os primeiros quadradinhos de cada linha estão alinhados. Por exemplo, na figura a seguir temos uma escadinha de tamanho 3.

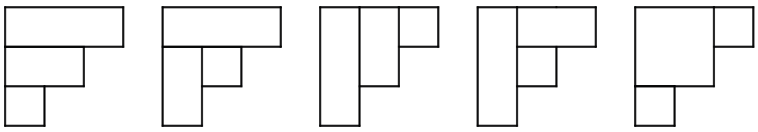


Você sabe quantas maneiras diferentes existem de separar uma escadinha de tamanho n em n retângulos formados por quadradinhos? Pode-se demonstrar (não tente fazer isto agora) que o número de maneiras é igual a

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)\cdot(2n-1)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n\cdot(n-1)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

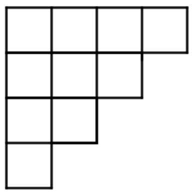
Os números C_n são conhecidos como *números de Catalan*.

Por exemplo, para $n = 3$, temos $C_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = 5$ e nas figuras a seguir mostramos as 5 maneiras diferentes. Observe que poderíamos separar a escadinha de tamanho 3 em 6 quadradinhos (que são retângulos, não se esqueça), por exemplo, mas só contamos as maneiras com exatamente 3 retângulos.



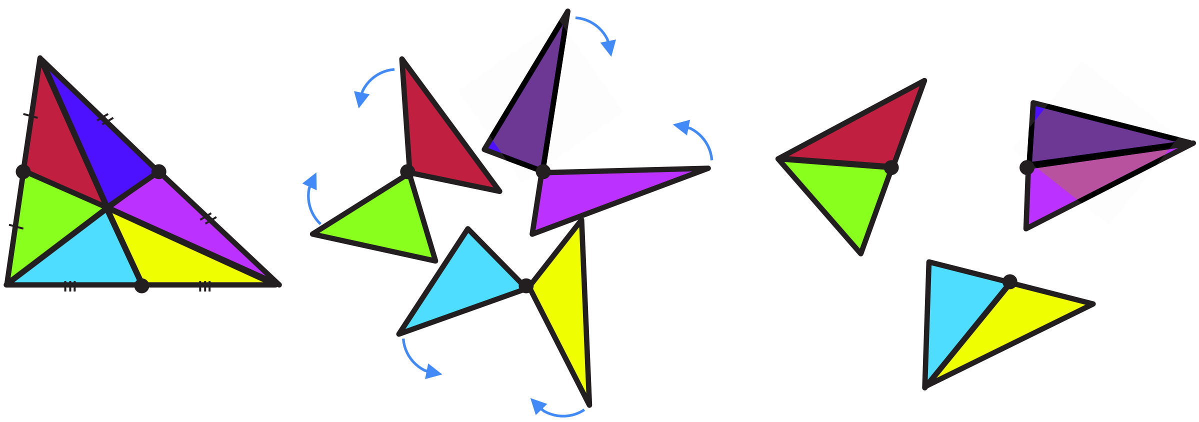
a) Calcule, utilizando a fórmula acima, C_4 e diga quantas maneiras existem de separar uma escadinha de tamanho 4 em 4 retângulos formados por quadradinhos.

b) Mostre na sua folha de respostas todas as maneiras diferentes de separar uma escadinha de tamanho 4 em 4 retângulos formados por quadradinhos.



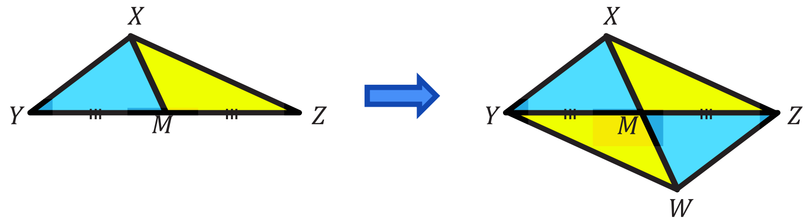
PROBLEMA 5 – $\boxed{\text{Valor: 3 pontos}}$

Tome um triângulo de papel, marque os pontos médios de seus lados e faça os cortes indicados formando seis triângulos menores. Gire esses triângulos em torno dos pontos médios e obtenha três triângulos menores.



Mostraremos nesse problema que esses três triângulos são congruentes, ou seja, seus lados e ângulos têm respectivamente as mesmas medidas.

Uma figura que vai nos ajudar bastante é o *paralelogramo*, que são os quadriláteros com lados opostos paralelos. Um paralelogramo pode ser obtido copiando e girando em 180° um triângulo XYZ em torno do ponto médio M do lado $\overline{YZ}$. Note que XY e ZW formam ângulos iguais com YZ e, por *alternos internos*, XY e ZW são paralelos. O mesmo argumento serve para provar que XZ e YW são paralelos. Assim, $XYWZ$ tem os pares de lados opostos paralelos e é de fato um paralelogramo.

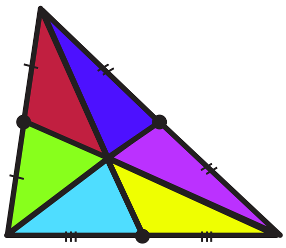


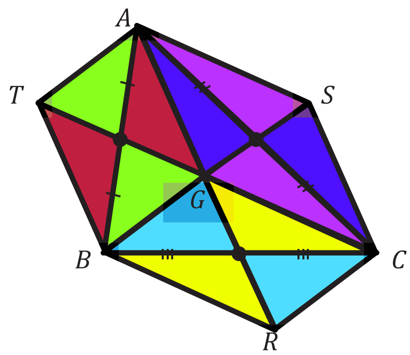
Triângulo XYZ Paralelogramo $XYWZ$

a) Explique por que os pontos X, M e W estão sobre uma mesma reta.

b) Sabemos que XYZ e WZY são triângulos congruentes. Explique por que os triângulos XYW e WZX são congruentes.

Voltando ao nosso problema, fazemos uma cópia de cada triângulo e giramos cada cópia em $180°$. Obtemos assim os paralelogramos $AGBT$, $BGCR$ e $CGAS$.





c) Mostre que $BRGT$ é um paralelogramo.

d) Termine o problema, ou seja, mostre por que os triângulos GBR, BGT e SGC são congruentes.

PROBLEMA 6 – $\boxed{\text{Valor: 4 pontos}}$

Um número racional r, $0 < r < 1$, é um *quadradobrado* quando existem inteiros positivos a e b, tais que $r = \frac{a}{b}$ e r^2 é igual à fração cujo numerador é igual aos dígitos de a repetidos duas vezes uma após a outra exatamente na mesma ordem e cujo denominador é igual aos dígitos de b repetidos duas vezes uma após a outra também na mesma ordem. Por exemplo, $\frac{1}{91}$ é um quadradobrado pois $\frac{1}{91} = \frac{2}{182}$ e $\left(\frac{2}{182}\right)^2 = \frac{22}{182182}$.

Vale a pena observar que $\left(\frac{1}{91}\right)^2 \neq \frac{11}{9191}$ e, por isso, precisamos tomar a fração equivalente $\frac{2}{182}$. É verdade que $\left(\frac{1}{91}\right)^2 = \frac{11}{91091}$, porém não é permitido colocar zeros entre as repetições dos algarismos.

Nesta questão iremos mostrar que existem infinitos racionais quadradobrados.

Pode-se verificar que $\frac{1}{91} = \frac{11}{1001}$. Assim, observe o que acontece quando multiplicamos, por exemplo, a fração $\frac{2}{123}$ por $\frac{1}{91}$:

$$\frac{2}{123} \cdot \frac{1}{91} = \frac{2}{123} \cdot \frac{11}{1001} = \frac{22}{123123}.$$

a) Mostre que ao multiplicarmos uma fração $\frac{a}{b}$ em que a é um inteiro positivo de um dígito e b é um inteiro positivo de três dígitos por $\frac{1}{91}$ obtemos uma fração que é equivalente a uma em que o numerador é igual aos dígitos de a repetidos duas vezes uma após a outra exatamente na mesma ordem e cujo denominador é igual aos dígitos de b repetidos duas vezes uma após a outra também na mesma ordem.

b) Considerando o item anterior, diga o que acontece quando multiplicamos uma fração $\frac{a}{b}$ em que a é um inteiro positivo de dois dígitos e b é um inteiro positivo de seis dígitos por $\frac{101}{1000001}$. *Não se esqueça de que você deve justificar a sua resposta.*

c) Temos que $\frac{101}{1000001} = \frac{1}{9901}$. Mostre que este racional é um quadradobrado.

d) Verifique que $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ e conclua que:

$$\frac{x+1}{x^3+1} = \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

e) Simplifique a fração

$$\frac{10^3 + 1}{10^9 + 1}.$$

c) Mostre que existem infinitos racionais quadradobrados.

PROBLEMA 7 – Valor: 5 pontos

Suponha que nós tenhamos diversos cubos de aresta unitária (que denominaremos *cubinhos*) com cada face pintada de azul ou vermelho. Considere ainda que ambas as cores aparecem em cada um dos cubinhos.

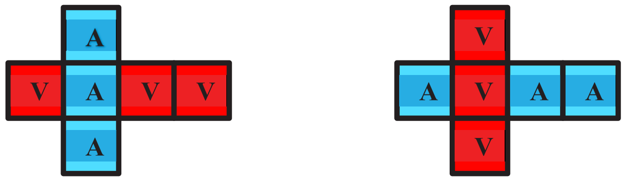
Nesse problema vamos analisar a seguinte questão: *Quantos cubos devemos ter, no mínimo, para que seja possível montar um cubo* $n \times n \times n$, $n \geq 2$, *com cada face monocromática (de uma única cor)?* Este cubo será chamado de *cubo maior*.

Inicialmente, podemos observar que é possível escolher quaisquer $(n-2)^3$ cubinhos para serem os que ficarão escondidos dentro do cubo maior, pois nenhuma das suas faces irá aparecer. Do mesmo modo, para preencher os interiores das n faces podemos escolher quaisquer $6(n-2)^2$ cubinhos, pois apenas uma das suas faces irá aparecer e todos os cubos da caixa possuem faces de ambas as cores. Assim, podemos nos focar nos oito cubinhos que conterão os vértices do cubo maior e os $12(n-2)$ que conterão as arestas, mas não os vértices, de tal cubo. Chamaremos estes $8 + 12(n-2) = 12n - 16$ cubinhos de *moldura* do cubo maior.

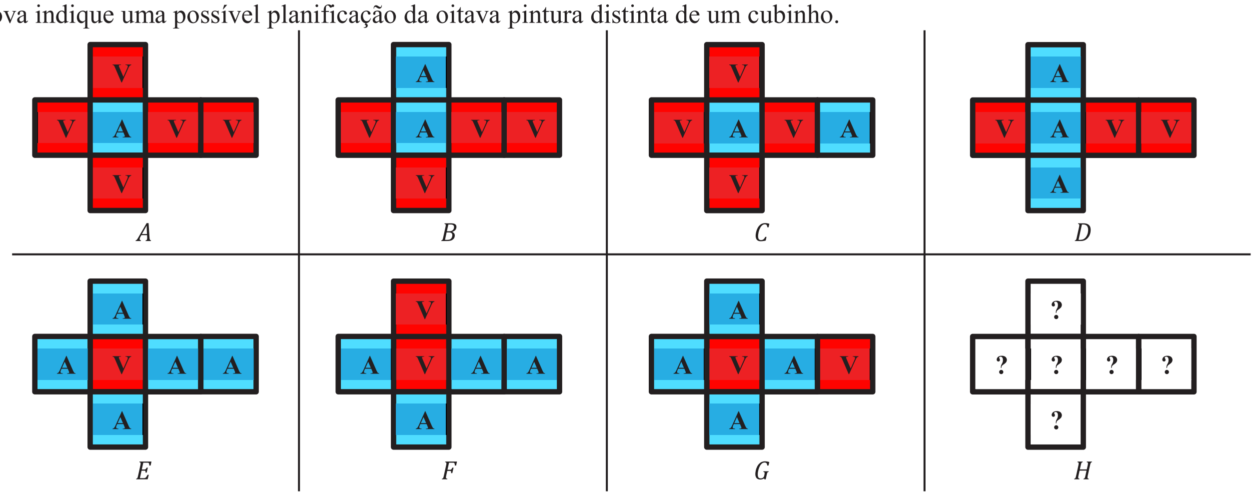
O problema, então, se resume a encontrar o menor número de cubinhos que precisamos para montar a moldura de um cubo $n \times n \times n$ em que cada face é monocromática.

Vamos chamar os oito cubinhos que contêm os vértices do cubo maior de *cantos*. Como três faces destes cubinhos são visíveis após a montagem do cubo maior, há quatro possibilidades de combinações de cores para os cantos, sendo que utilizaremos a letra A para a cor azul e a letra V para a cor vermelha: AAA, AAV, AVV e VVV. Para os $12(n-2)$ cubinhos das arestas que não são cantos e que, portanto, têm duas faces visíveis há três combinações: AA, AV, VV.

Nós consideramos duas pinturas do cubo iguais se uma pode ser obtida da outra por meio de rotações. Por exemplo, as pinturas indicadas pelas planificações a seguir são iguais.



a) A seguir apresentamos a planificação de sete das oito pinturas de um cubinho com as cores azul e vermelha. Na folha de respostas da prova indique uma possível planificação da oitava pintura distinta de um cubinho.

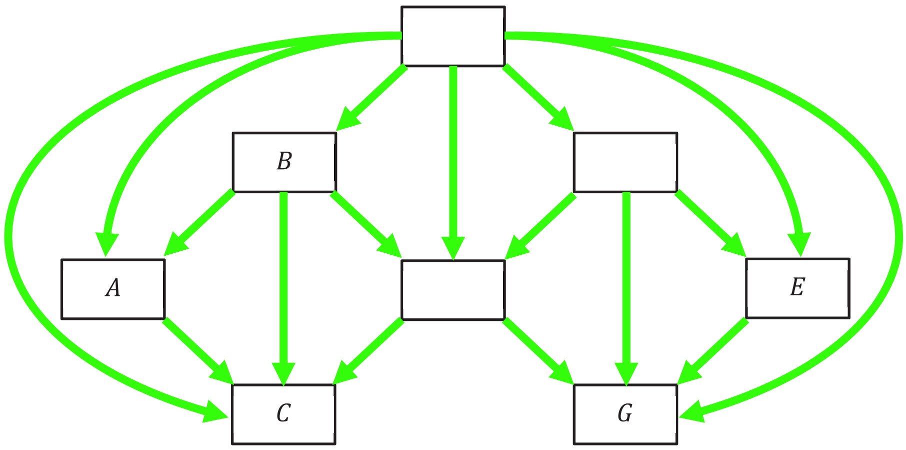


Dica: o exemplo acima de pinturas iguais indica que esse item é mais difícil do que parece.

b) Copie e preencha na sua folha de respostas os espaços que faltam na tabela a seguir. Nela indicamos quantas vezes cada configuração de três faces visíveis e cada configuração de duas faces visíveis aparecem em cada uma das oito pinturas distintas.

Pintura	AAA	AAV	AVV	VVV	AA	AV	VV
A	0	0	4	4	0	4	8
B	0	2	4	2		6	
C	0	0	8	0	0	8	4
D	0			0	2		
E	4	4	0	0	8	4	0
F							
G	0	8	0	0	4	8	0
H							

c) Considerando a tabela acima, podemos fazer um diagrama no qual ligamos duas pinturas por uma flecha se uma delas contém todas as configurações de três faces visíveis que a outra possui. Por exemplo, a pintura A está ligada à pintura C, pois ela contém as configurações AVV e VVV enquanto C possui apenas AVV. A flecha é colocada no sentido daquela cujas configurações estão contidas, como no nosso exemplo de A para C. Copie e complete o diagrama na sua folha de respostas.



d) Determine os valores de n para os quais, utilizando n cubos do tipo C e $10 - n$ do tipo G, não é possível montar um cubo $2 \times 2 \times 2$.

e) Mostre que, se temos quaisquer 11 cubinhos de aresta unitária com cada face pintada de azul ou vermelho, é possível montar um cubo $2 \times 2 \times 2$ com cada face monocromática (ou seja, de uma única cor).

f) Quantos cubinhos, no mínimo, são necessários para termos certeza de que é possível montar um cubo $4 \times 4 \times 4$ com cada face monocromática (ou seja, de uma única cor), não importando quais cubinhos temos? *Não se esqueça de justificar sua resposta.*