XLIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2020)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas **à mão, a tinta ou a lápis**; que estejam **legíveis**. Soluções digitadas ou ilegíveis **não** serão consideradas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Há uma crença bastante difundida que cada ano de envelhecimento humano corresponde a sete anos para um cachorro. No entanto, essa equivalência é enganosa e tem sido constantemente rejeitada por veterinários. Um estudo recente, realizado na Universidade da Califórnia em San Diego (UCSD), apresentou uma nova abordagem para comparar o envelhecimento de cães e humanos. Em uma dessas análises, os pesquisadores descobriram que as primeiras oito semanas de vida de um cão são comparáveis aos primeiros nove meses da infância humana, mas essa razão muda com o tempo.

Para estudar tal correspondência, os pesquisadores se concentraram na chamada *metilação do DNA*. A metilação é, em linhas gerais, o acréscimo de moléculas de metil ao DNA. Em cães e humanos, esse acréscimo está associado ao envelhecimento celular.
Com os dados obtidos de 104 cachorros, a maioria da raça labrador, e 320 humanos, eles chegaram à seguinte fórmula:

$$\text{Idade Humana} = 31 + 16 \cdot \ln(\text{Idade do Cachorro})$$

Ambas as idades são medidas em anos.

a) *Adjutant* (14/08/1936 – 20/11/1963) foi reconhecido pelo "Livro dos Recordes" em 1966 como o labrador que morreu mais velho, com 27 anos e 3 meses. Considerando que $e^{3,3} \approx 27,25$, qual era a "Idade Humana" de Adjutant ao falecer?

b) Mostre que, segundo a fórmula, para ter 1000 anos de "Idade Humana", um cachorro teria de ser mais velho do que o universo, cuja idade estimada é 14 bilhões de anos.
Nesse item você pode desejar utilizar que $e^3 \approx 20$.

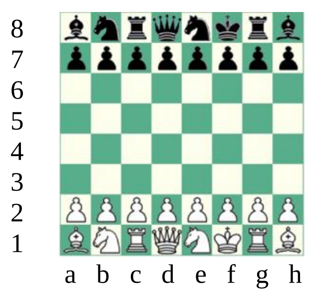
PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

O Xadrez de Fischer, também conhecido como Fischer Random Chess ou Chess 960 (guarde este nome) é uma variação do jogo de xadrez criada pelo enxadrista Robert James "Bobby" Fischer (1943-2008), campeão mundial em 1972-75 e considerado por muitos o melhor enxadrista da história. Nesta variação são usados o mesmo tabuleiro e as mesmas peças do xadrez padrão, mas as posições iniciais variam obedecendo certas regras. Com essas variações a memorização de aberturas (sequências de movimentos iniciais em partidas) perde espaço e a criatividade se torna mais importante.

Basta definir as posições das peças da cor branca, já que as peças da cor preta são colocadas em posições simétricas, como mostra a figura. Os peões brancos devem ocupar a linha 2. As outras oito peças (um rei, uma rainha, dois bispos, dois cavalos e duas torres) devem ocupar a linha 1 de acordo com as seguintes duas regras:

I. o rei fique entre as duas torres;
II. os bispos fiquem em casas de cores diferentes.

A seguir um exemplo de configuração inicial, em que na linha 1, da esquerda para a direita, temos bispo (♗), cavalo (♘), torre (♖), rainha (♕), cavalo, rei (♔), torre, bispo. Os peões (♙) estão na linha 2.

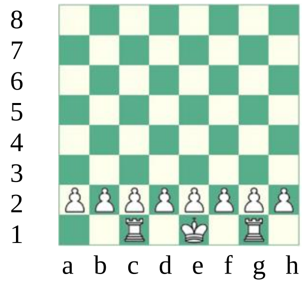


Estamos interessados em saber o número de disposições iniciais possíveis para as peças do Xadrez de Fischer.

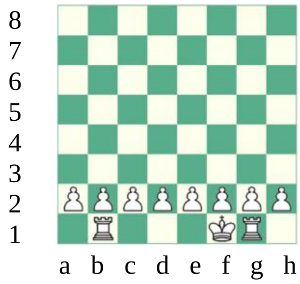
Em geral, em problemas de contagem vale a pena começar pensando em como satisfazer as restrições primeiro. Como há duas regras, há duas restrições. Com qual é melhor começar?

a) Suponha que começaremos colocando na linha 1 apenas o rei, as duas torres e a rainha, seguindo a regra I. É sempre possível colocar as outras quatro peças seguindo a regra II? Não se esqueça de que você deve justificar suas respostas.

b) Suponha que colocamos o rei e as duas torres nas seguintes duas disposições:



Disposição X



Disposição Y

De quantas maneiras podemos escolher as posições do bispo da casa branca e do bispo da casa preta em cada disposição?

c) Os itens a e b mostram que começar colocando o rei e as duas torres altera o número de maneiras de colocar as demais peças, complicando nosso processo de contagem.

Uma forma mais simples de contar o número de variações do Xadrez de Fischer é escolher as posições das peças na seguinte ordem:

1º) bispo da casa preta
2º) bispo da casa branca
3º) rainha
4º) os dois cavalos
5º) rei e torres

Existem quantas disposições iniciais possíveis para o Xadrez de Fischer? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Talvez você já tenha visto as seguintes fórmulas:

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

Neste problema, mostraremos como encontrar fórmulas para somas do tipo:

$$S_k(n)=0^k+1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k, n\geq 1,$$

para k inteiro não negativo fixado. Adotaremos como convenção que $0^0=1$ (o que só é relevante para $k=0$). Em especial, encontraremos a fórmula para $S_4(n)=0^4+1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4$.

Vamos assumir que, para k inteiro não negativo fixado, $S_k(n)$ é um polinômio de grau $k+1$ na variável n, isto é, $S_k(n)=a_{k+1}n^{k+1}+a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_1n+a_0$, em que $a_{k+1},a_k,\ldots,a_0$ não dependem de n.

a) Prove que, para $n\geq 1$, $S_k(n+1)-S_k(n)=n^k$.

A partir desse fato, pode-se demonstrar que devemos ter $a_0=0$.

b) Seja $S_4(n)=a_5n^5+a_4n^4+a_3n^3+a_2n^2+a_1n$. Mostre que a_5,a_4,a_3,a_2,a_1 satisfazem o sistema linear:

$$\begin{cases}\binom{5}{0}a_5+\binom{4}{0}a_4+\binom{3}{0}a_3+\binom{2}{0}a_2+\binom{1}{0}a_1=0\\ \binom{5}{1}a_5+\binom{4}{1}a_4+\binom{3}{1}a_3+\binom{2}{1}a_2=0\\ \binom{5}{2}a_5+\binom{4}{2}a_4+\binom{3}{2}a_3=0\\ \binom{5}{3}a_5+\binom{4}{3}a_4=0\\ \binom{5}{4}a_5=1\end{cases}.$$

Dica: Você pode querer utilizar o binômio de Newton:

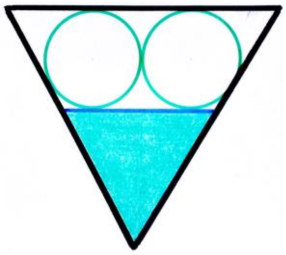
$$(a+b)^m=\binom{m}{m}a^m+\binom{m}{m-1}a^{m-1}b+\binom{m}{m-2}a^{m-2}b^2+\cdots+\binom{m}{1}ab^{m-1}+\binom{m}{0}b^m,$$

em que $\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!(m-k)!}$.

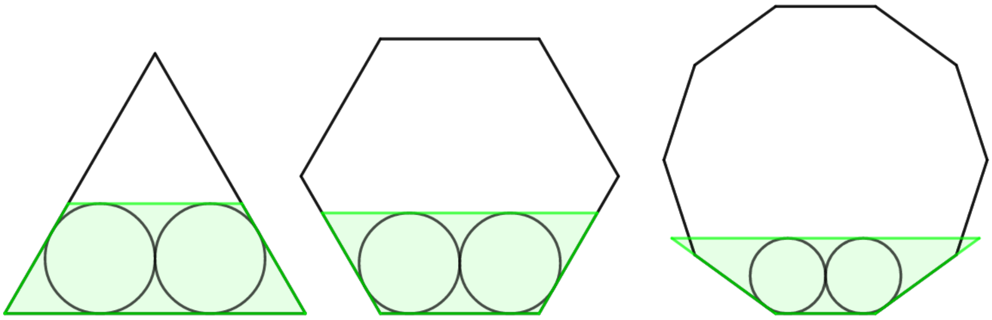
c) Encontre uma fórmula fechada para $S_4(n)=0^4+1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4$.

PROBLEMA 4 – $\boxed{\text{Valor: 3 pontos}}$

Catriona Agg é uma professora de Matemática em Cambridge, no Reino Unido, que posta frequentemente no Twitter (@CShearer41) quebra-cabeças geométricos, desenhados à mão. Um deles é o seguinte: encontrar que fração está pintada no triângulo equilátero a seguir.



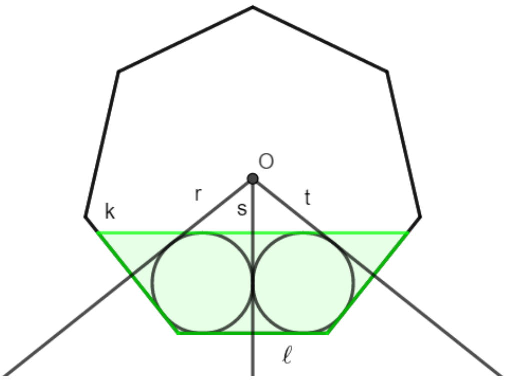
A resposta é bonita, e inspirou Diego Rattaggi, um matemático suíço, a generalizar o problema da seguinte maneira: Dado um polígono regular P de n lados, trace em seu interior duas circunferências de mesmo raio tangentes externamente entre si e a dois lados consecutivos de P, e em seguida a tangente comum paralela ao lado ℓ tangente às duas circunferências. Encontre a razão entre a área do trapézio T delimitado pela faixa que contém as duas circunferências e pelas retas que contêm os lados vizinhos ao lado ℓ e a área de P. A seguir exibimos o problema para $n = 3$, $n = 6$ e $n = 10$ (para o qual o trapézio T não está mais contido em P).



Nos itens a seguir você pode usar uma figura como referência, como o heptágono, mas suas respostas devem se referir a um polígono regular de n lados.

a) Dado o polígono regular P, de n lados, seja O o centro de P, e trace as três retas r, s e t tangentes às duas circunferências, em que s é a tangente interna comum. Mostre que essas três retas passam pelos pontos médios dos três lados que são tangentes a pelo menos uma das circunferências.

Nessa questão você pode querer utilizar que um ponto A no interior do ângulo $\angle XYZ$ está sobre a bissetriz interna desse ângulo se, e somente se, A é equidistante às retas YX e YZ.



b) As três retas r, s e t cortam o trapézio T em dois pentágonos congruentes e dois triângulos congruentes U e V. Seja k a reta que contém o lado do trapézio paralelo ao lado ℓ. Mostre que os triângulos U e V e os triângulos determinados pelos trios de retas $\{k, r, s\}$ e $\{k, s, t\}$ são congruentes.

c) Encontre, em função de n, a razão $\frac{\text{área}(T)}{\text{área}(P)}$.

A professora Catriona também tem um livro, *Geometry Puzzles in Felt Tip* (publicada sob seu nome de solteira, Catriona Shearer). Se você gostou desse problema, há muitos mais de onde esse veio.

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

Uma "*matemágica*" bem conhecida é a seguinte:

• Tomamos a dízima periódica que aparece no desenvolvimento de $\frac{1}{7}$: $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$.

• Agora multiplicamos o número formado pela dízima por 1,2,3,4,5,6 e SURPRESA!!

$$2 \cdot 142857 = 285714$$
$$3 \cdot 142857 = 428571$$
$$4 \cdot 142857 = 571428$$
$$5 \cdot 142857 = 714285$$
$$6 \cdot 142857 = 857142$$

Todas as respostas são trechos da mesma dízima periódica

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$$

Bem legal!!

Nesta questão, vamos entender que magia é essa e ver que fenômenos semelhantes ocorrem para outras dízimas e resolver um problema bem interessante com as ideias estudadas.

Inicialmente, vamos olhar uma situação similar envolvendo números maiores e dízimas cujos períodos envolvem mais dígitos. Observe:

$$\frac{1}{53} = 0,\overline{0188679245283}$$
$$\frac{29}{53} = 0,\overline{5471698113207}$$
$$11 \cdot 188679245283 = 2075471698113$$
$$29 \cdot 188679245283 = 5471698113207$$
$$10^3 \cdot 11 - 29 = 10971 \text{ é múltiplo de } 53$$

Nós vamos aprender nos itens do problema como esses fatos se conectam.

No exemplo dado, podemos observar que 11 e 29, os números que aparecem na expressão que é divisível por 53, ao serem multiplicados pelo período da dízima de $\frac{1}{53}$, resultam em números formados pelos mesmos algarismos. A única diferença é que os algarismos de $11 \cdot 188679245283 = 2075471698113$ sofrem uma espécie de "deslocamento cíclico" de três casas para obtermos $29 \cdot 188679245283 = 5471698113207$. Veremos que isso é explicado pelo expoente 3 em 10^3. O 10 aparece pois estamos utilizando a base decimal. Hora de colocar a mão na massa para entender de verdade o que está acontecendo!

Sejam e, m, n, D inteiros positivos tais que $\text{mdc}(D, 10) = 1$, $D > m$, $D > n$ e $10^e \cdot m - n$ é múltiplo de D. Seja ainda $\frac{1}{D} = 0,\overline{d_1 d_2 \ldots d_p}$.

a) Mostre que existe um $\alpha < D$ inteiro positivo tal que $10^\alpha - 1$ é múltiplo de D. Mostre também que p, o número de dígitos da dízima de $\frac{1}{D}$, é igual ao menor valor possível para α.

b) Prove que os algarismos não nulos de $m \cdot d_1 d_2 \ldots d_p$ são os mesmos de $n \cdot d_1 d_2 \ldots d_p$ contando repetições. Ou seja, cada um dos dígitos $1, 2, \ldots, 9$ deve aparecer a mesma quantidade de vezes em ambos os números.

Dica: Nesse item, você pode achar útil considerar $\frac{n}{D} = 0,\overline{n_1 n_2 \ldots n_p}$ (por que podemos supor que o índice é p?).

c) Encontre um inteiro positivo c tal que $20c$ e $44c$ possuam os mesmos algarismos, incluindo zero, contando repetições.

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Um dos matemáticos cujas ideias têm sido mais aproveitadas na OPM é John Horton Conway (26/12/1937 – 11/04/2020). Ele foi uma das vítimas da Pandemia e esse problema é a nossa (muitíssimo) humilde homenagem a uma das mais brilhantes mentes de toda a história.

MUITO OBRIGADO CONWAY, POR TORNAR A MATEMÁTICA TÃO APAIXONANTE!!

John H. Conway procurando o original do trabalho de pesquisa que inspirou essa questão da OPM: *A Headache-Causing Problem* por Conway (J.H.), Paterson (M.S.) e Moscou (U.R.S.S.). Exatamente, ele colocou a cidade de Moscou – ainda como capital da antiga União Soviética – como coautora do artigo, pois escreveu o trabalho lá com Mike Paterson em 1977. Foto de Tanya Khovanova.

Vamos ao problema!

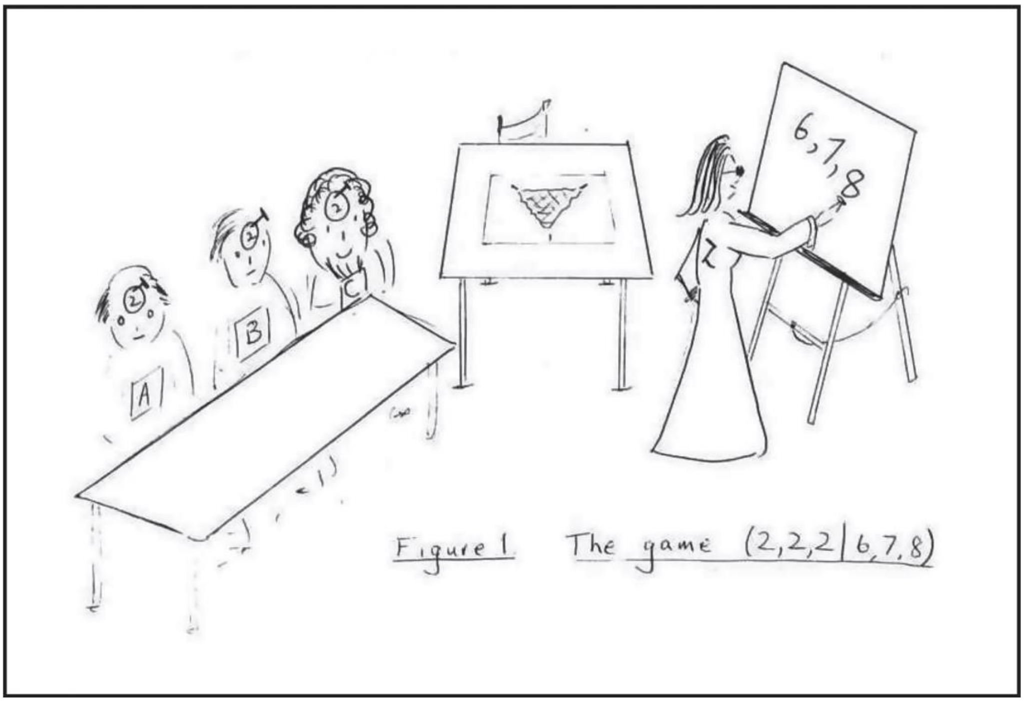


Figura 1: como apresentada no artigo de 1977.

Um total de N pessoas são colocadas sentadas em uma mesa de uma sala como na *Figura 1* (nela $N = 3$). Então a juíza, mostrada em pé na figura, faz o seguinte o pronunciamento:

Nós somos todos, como cada um de vocês sabem, infinitamente inteligentes e honrados. Para que possam resolver juntos um quebra-cabeça, foram presos a suas testas pequenos discos contendo numerais que representam números inteiros não negativos. A soma desses números é um dos valores que vocês estão vendo escritos na lousa.
*Eu lamento pelo pequeno desconforto que a situação possa estar causando, mas, graças ao "Teorema de Conway-Peterson-Moscou", posso garantir que ele não irá durar tanto. Eu irei perguntar, alternadamente, para cada um de vocês – no nosso exemplo, primeiro para **A**rnaldo; depois, se for necessário, para **B**ernaldo; então, se for necessário, para **C**ernaldo; voltando, se for necessário, para **A**rnaldo; e assim por diante – se você consegue descobrir o número que está na sua testa, o qual é o único que você não vê. Sua resposta deve ser apenas "Sim" ou "Não". A brincadeira termina quando ocorrer a primeira resposta "Sim". O quebra-cabeça estará, então, resolvido!*

O *Teorema de Conway-Peterson-Moscou* afirma que se a quantidade de números escritos na lousa é menor ou igual ao número N de pessoas sentadas (ou seja, com números nas testas), o quebra-cabeça será resolvido após um número finito de perguntas da juíza. Nos vários itens dessa questão iremos explorar os significados desse resultado.

Sejam a o número na testa da pessoa A; b o número na testa da pessoa B; c o número na testa da pessoa C e, por diante; e $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$ as somas colocadas na lousa. Denominaremos tal quebra-cabeça $(a, b, c, \ldots \mid s_1, s_2, s_3 \ldots)$. Por exemplo, o quebra-cabeça apresentado na Figura 1 é $(2,2,2|6,7,8)$. A *Figura 2* a seguir mostra um resumo do que ocorre com os quebra-cabeças da forma $(a, b, c|6,7,8)$. As ternas que aparecem são alguns dos possíveis valores para a, b e c. Os números que aparecem são os totais de perguntas para resolver o quebra-cabeça. No canto superior direito há uma representação das conexões do quebra-cabeça $(a, b, c|6,7,8)$ com $(a+1, b, c|6,7,8)$, $(a, b+1, c|6,7,8)$ e $(a, b, c+1|6,7,8)$ na figura. Alguns números foram omitidos, pois você deve encontrá-los nos itens a e b a seguir.

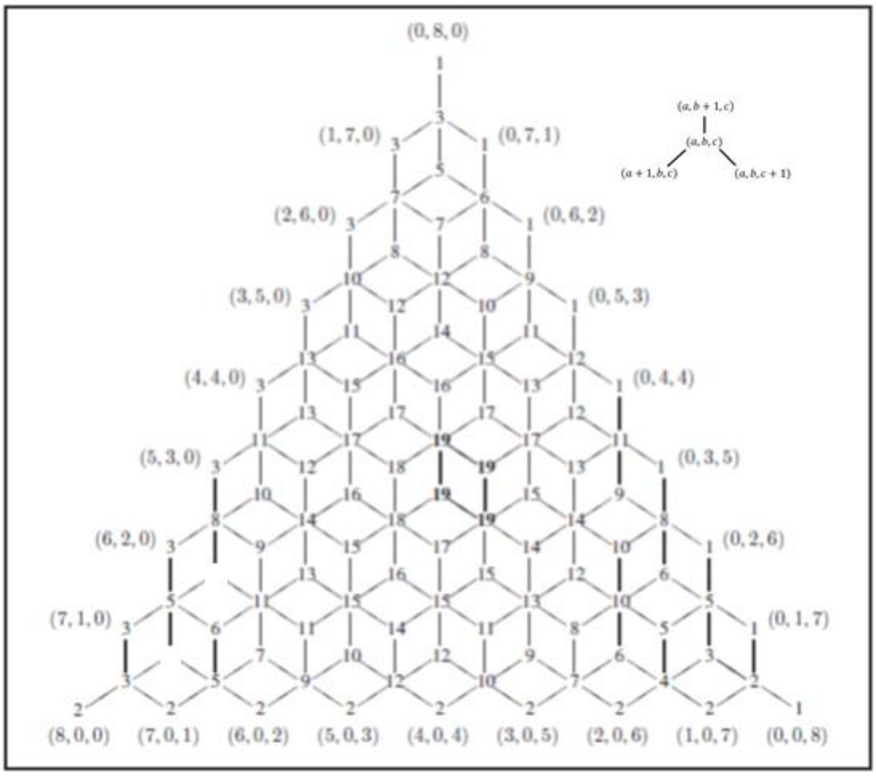


Figura 2

Por exemplo, são necessárias 3 perguntas para resolver $(1,7,0|6,7,8)$ e são necessárias 5 perguntas para resolver $(0,6,0|6,7,8)$. Estamos quase prontos para as perguntas, vamos entender melhor o que acontece em cada caso citado.

$(\mathbf{1}, \mathbf{7}, \mathbf{0} \mid \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8})$
• **A**rnaldo vê os números $b = 7$ e $c = 0$. Ele imediatamente conclui que a soma não pode ser 6; mas para soma 7, temos $a = 0$; e, para soma 8, temos $a = 1$. Ele responde "Não".
• **B**ernaldo vê os números $a = 1$ e $c = 0$. Para soma 6, temos $b = 5$; para soma 7, temos $b = 6$; e, para soma 8, temos $b = 7$. Ele responde "Não".
• **C**ernaldo vê os números $a = 1$ e $b = 7$. Ele imediatamente conclui que a soma não pode ser 6 ou 7. Para soma 8, temos $b = 0$. Ele responde "Sim" e o jogo termina após 3 perguntas.

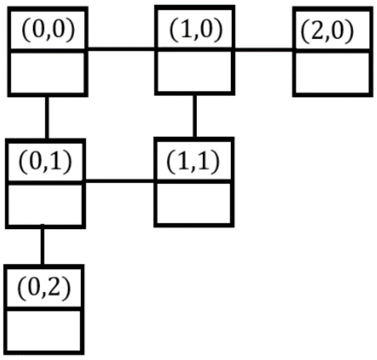
$(\mathbf{0},\mathbf{6},\mathbf{0}|\mathbf{6},\mathbf{7},\mathbf{8})$

• **A**rnaldo vê os números $b=6$ e $c=0$. Para soma 6, temos $a=0$; para soma 7, temos $a=1$; e, para soma 8, temos $a=2$. Ele responde "Não".
• **B**ernaldo vê os números $a=0$ e $c=0$. Para soma 6, temos $b=6$; e para soma 7, temos $b=7$; e para soma 8, espere! Algo muito interessante acontece agora: para soma 8, temos $b=8$, porém $(0,8,0|6,7,8)$ é resolvida com apenas uma pergunta (verifique!) e, portanto, Bernaldo sabe que esse caso não é possível. Mesmo assim, ele ainda tem de responder "Não".
• **C**ernaldo vê os números $a=0$ e $b=6$. Para soma 6, temos $c=0$; para soma 7, temos $c=1$; e, para soma 8, temos $c=2$. Ele responde "Não".
• **A**rnaldo vê os números $b=6$ e $c=0$. Sem novidades, mas, calma, de novo algo interessante acontece! O quebra-cabeça $(0,7,0|6,7,8)$ é resolvido com 3 perguntas (verifique!). Logo as possibilidades são apenas $a=0$ ou $a=2$. Mesmo assim, ele ainda tem de responder "Não".
• **B**ernaldo sabe (todos sabem, eles são infinitamente inteligentes, lembre-se) que $(0,7,0|6,7,8)$ é resolvido com 3 perguntas. Logo $b=6$ e ele responde "Sim".

a) Determine o número de perguntas para resolver $(6,0,0|6,7,8)$. Você deve justificar a sua resposta utilizando o modelo acima. Você pode usar apenas A, B e C para os nomes das pessoas e pegar valores que aparecem na figura 2. Você não precisa demonstrar os valores dados.

b) Determine o número de perguntas para resolver $(5,1,0|6,7,8)$. Você deve justificar a sua resposta utilizando o modelo acima. Você pode usar apenas A, B e C para os nomes das pessoas e pegar valores que aparecem na figura 2. Você não precisa demonstrar os valores dados.

c) O diagrama a seguir representa o quebra-cabeça $(a,b|0,1,2)$. Para cada par (a,b) que seja possível resolver com um número finito de perguntas indique o número total de perguntas e para cada par (a,b) que seja impossível explique o porquê.



Observe que esse item não contradiz o Teorema de Conway-Peterson-Moscou, pois nesse caso o número de pessoas sentadas, $N=2$, é menor do que o total de números escritos na lousa, 3.

d) Faça um diagrama completo do quebra-cabeça $(a,b|4,5)$ com o número de perguntas necessárias para cada (a,b).

e) Mostre que existe um quebra-cabeça tal que o número de perguntas para resolvê-lo é maior do que 2020. Não se esqueça de justificar a sua resposta, ou seja, além de apresentar o quebra-cabeça, você deve provar que o número de perguntas necessárias é maior do que 2020.

f) Prove o caso particular do Teorema de Conway-Peterson-Moscou para $N=2$ e dois números na lousa: $(a,b|s_1,s_2)$. Ou seja, mostre que com duas pessoas e duas somas sempre é possível após um número finito de perguntas que uma pessoa descubra o seu número.

PROBLEMA 7 – $\boxed{\text{Valor: 5 pontos}}$

Ao cortar uma rosquinha, podemos obter secções circulares ao cortarmos radialmente (figura 1) ou simetricamente (figura 2).

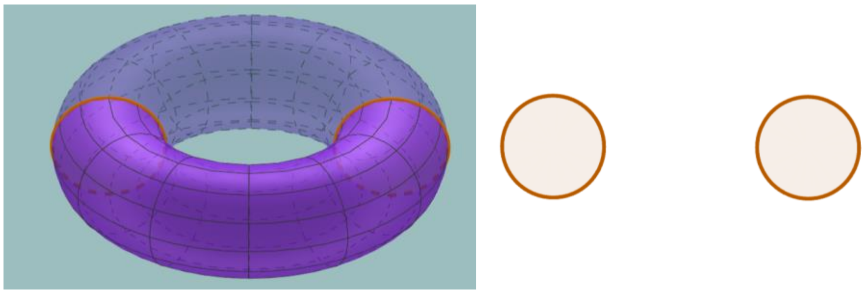


Figura 1

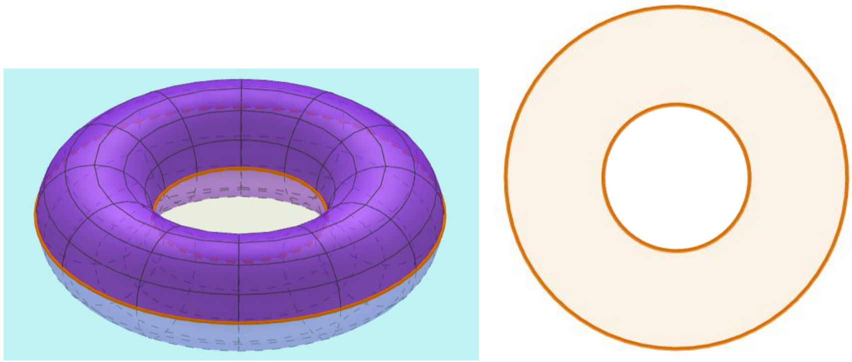


Figura 2

Você sabia que é possível cortar a rosquinha através de um corte "torto" e obter mais duas circunferências?

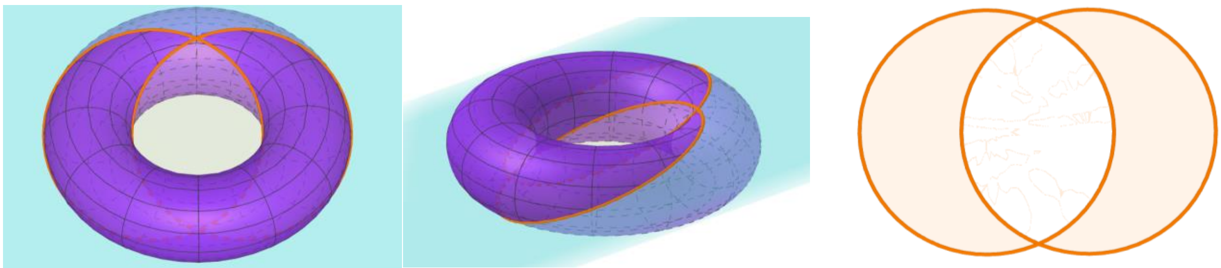
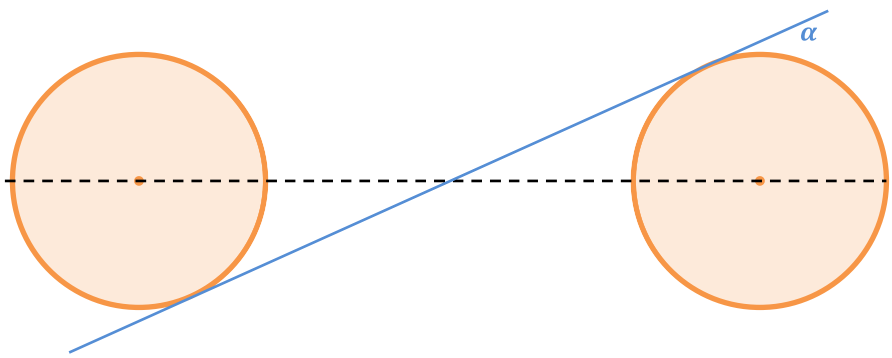


Figura 3

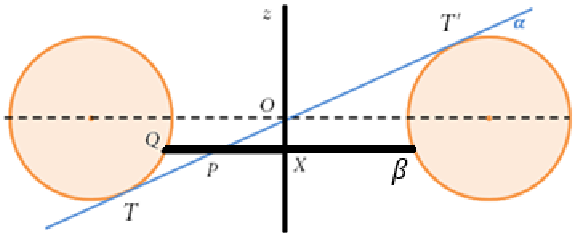
É isso que iremos mostrar nesse problema.

Vamos formalizar um pouco mais a ideia de "rosquinha" e "corte": a "rosquinha" tem um nome matemático, que é *toro*, e é obtido rotacionando um círculo em torno de um eixo e o "corte" é a interseção de um toro com um plano. Para ajudar na visualização, usaremos secções em vez de ilustrar o desenho todo como nas figuras anteriores.

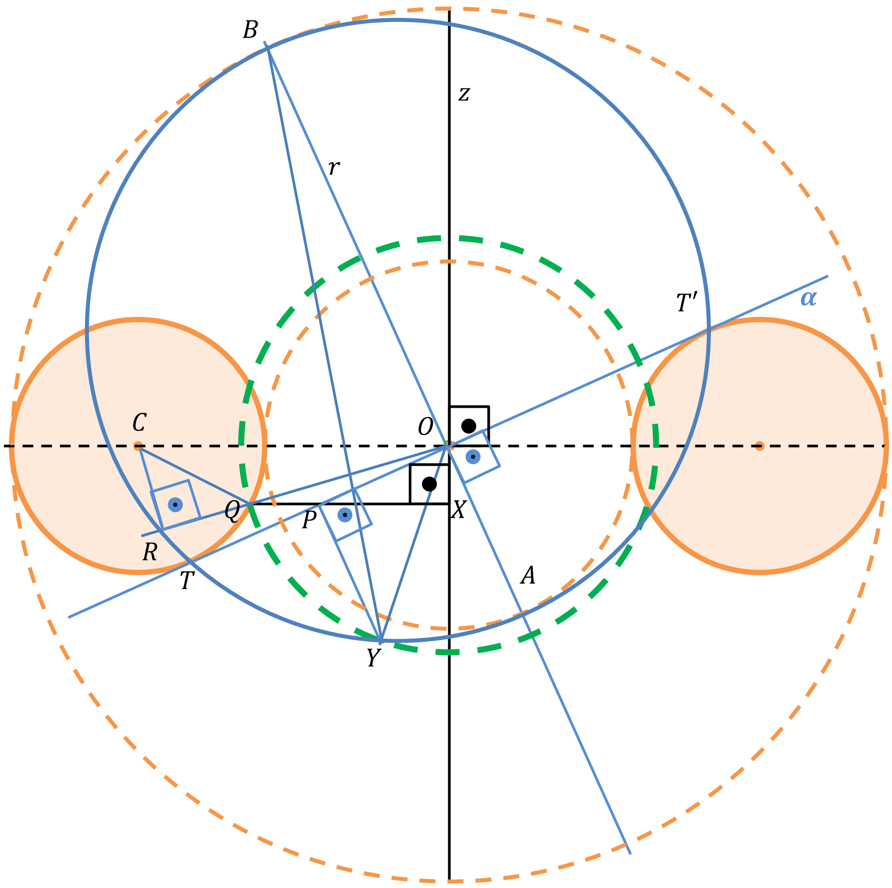
O plano da figura 3, que doravante denominaremos α, é obtido da seguinte forma: ao fazermos um corte radial, o plano determina nesse corte uma tangente comum interna às duas circunferências:



Considere o eixo z do toro, os pontos T e T' de tangência do plano α com as duas circunferências do toro e o centro O da figura que é o ponto de encontro de z e TT'. Seja P um ponto sobre o segmento TT'. Trace um plano β por P perpendicular ao eixo, obtendo o ponto Q sobre o toro numa das circunferências e X sobre o eixo z como na figura a seguir.



Na figura a seguir, temos o corte radial visto na figura anterior e sobrepomos o corte simétrico exibido na figura 2. No plano α, a reta r passa no ponto O e é perpendicular a TT'. Veja que r está no plano de corte simétrico e temos pontos de interseção A e B com as circunferências interna e externa do corte, como mostrado na figura a seguir. Há também outros dois pontos A' e B' de interseção de r com as circunferências, mas não vamos utilizá-los diretamente nesta demonstração.



O ponto Y está na circunferência de raio OQ e centro O e $PY \perp OP$. Há outro ponto Y' que satisfaz essas condições, mas não vamos usá-lo nessa demonstração. Por potência de ponto concluímos que A, B, T e T' estão sobre uma circunferência, já que $OT \cdot OT' = OT^2 = OA \cdot OB$. Esta circunferência está destacada na figura anterior.

a) Que figuras são formadas pela interseção do plano β com o toro? A partir disso, explique por que Y está na borda da secção de α no toro.

b) Sendo R o pé da perpendicular do centro C à reta OQ, mostre que $\frac{CT}{OX} = \frac{OC}{OP}$ e $\frac{OX}{CR} = \frac{OQ}{OC}$.

c) Mostre que os triângulos CQR e OYP são semelhantes e tomando $m(R\hat{C}Q) = x$ determine as medidas dos ângulos $m(A\hat{O}Y)$ e $m(B\hat{O}Y)$ em função de x.

d) Calcule AY^2 e BY^2 em função apenas de OA, OB, OY, CQ e RQ.

e) Sendo S o segundo ponto de interseção de OQ com a circunferência de centro C, prove que $OS = OY + \frac{(OB-OA)RQ}{CQ}$.

f) Mostre que $AY^2 + BY^2 = AB^2$ e conclua que Y está na circunferência que passa pelos pontos A, B, T e T'.

g) Conclua o problema, ou seja, mostre que a secção de α no toro é delimitada por duas circunferências simétricas em relação a TT'.