XLIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (novembro de 2020)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

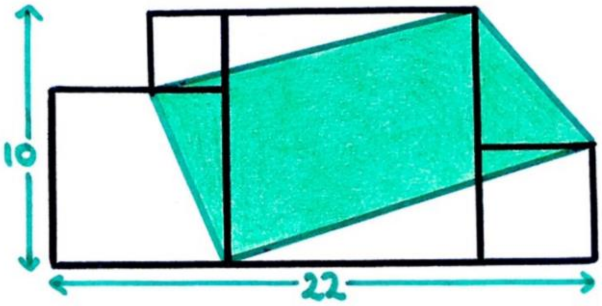
- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.

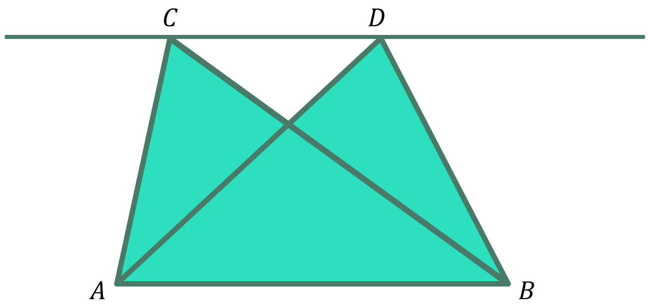
- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas **à mão, a tinta ou a lápis**; que estejam **legíveis**. Soluções digitadas ou ilegíveis **não** serão consideradas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

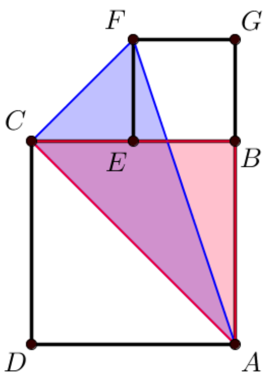
Catriona Agg é uma professora de Matemática em Cambridge, no Reino Unido, que posta frequentemente no Twitter (@CShearer41) quebra-cabeças geométricos, desenhados à mão. Um deles é encontrar a área pintada na figura a seguir, formada por quatro quadrados:



Esse problema pode ser resolvido de várias maneiras. Uma delas é considerar o fato de que se deslocarmos o vértice de um triângulo paralelamente ao lado oposto, a área não muda. Na figura a seguir, CD e AB são paralelos, o que torna as áreas de ABC e ABD iguais.



a) Na figura a seguir $ABCD$ e $BEFG$ são quadrados. Utilizando o fato apresentado mostre que as áreas destacadas, dos triângulos ACF e ACB, são iguais.



b) Observando que quadrados com lados paralelos têm diagonais correspondentes paralelas, encontre a área destacada.

A professora Catriona também tem um livro, *Geometry Puzzles in Felt Tip* (publicada sob seu nome de solteira, Catriona Shearer). Se você gostou desse problema, há muitos mais de onde esse veio (como o problema 6!).

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

A nova gasolina brasileira, produzida pela Petrobras, traz um avanço de tecnologia de produção e tem índices de octanagem e densidade superiores, fazendo com que um carro possa rodar mais com menos combustível. Segundo estudos da ANP, Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis, a nova gasolina traz uma redução do consumo de até 6% na quantidade de litros de gasolina por quilômetro rodado.

Em agosto de 2020 passaram a valer as novas especificações da gasolina comercializada no Brasil. Além disso, o preço da nova gasolina deve ser cerca de 1,5% maior em relação ao preço da antiga. O preço médio da gasolina antiga no Brasil em julho de 2020 foi de R$ 4,144 por litro.

a) Um carro de testes foi utilizado para comparar os dados apresentados. Primeiro, ele foi abastecido com R$150 da gasolina antiga e isso foi suficiente para rodar 502,5 km na cidade. Com a nova gasolina, foi possível rodar 524,8 km, nas mesmas condições. Usando o preço de julho de 2020, verifique se os dados desse teste estão dentro dos parâmetros apresentados.

b) Apesar de mais cara, no final das contas, com um melhor rendimento, o custo com a nova gasolina por km rodado acaba ficando menor. Calcule a economia semanal, em reais, que um motorista de táxi teria com gasolina considerando que ele trabalha 5 dias por semana e roda 250 km por dia de trabalho. Suponha que o carro do motorista de táxi tenha o mesmo rendimento que o carro de testes.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

A *pilha de cartas de Si Stebbins* é uma organização das 52 cartas do baralho baseada numa regra matemática. Ela foi popularizada pelo mágico (e matemático) Si Stebbins. As cartas são ordenadas de modo que sempre alternam os naipes seguindo a ordem **CHaSeD** usando os nomes dos naipes em inglês: **C**lubs (em português, Paus ♣), **H**earts (Copas ♥), **S**pades (Espadas ♠) e **D**iamonds (Ouros ♦). E o número de cada carta soma 3 no número anterior, sendo Ás (A) considerado o número 1, Valete (J) considerado o número 11, Dama (Q) considerado 12 e o Rei (K) considerado o número 13. Se a soma passar de 13, então deve-se subtrair o número 13 do valor para obter o número da próxima carta. Com essas regras, cada uma das 52 cartas aparece exatamente uma vez na pilha.

Por exemplo, na pilha de Si Stebbins o Ás de Paus (A♣) vem seguido de quatro de copas (4♥), sete de espadas (7♠), dez de ouros (10♦), rei de paus (K♣) e três de copas (3♥). Nesse último passo a soma seria $13 + 3 = 16$ e como passou de 13 devemos subtrair 13 para obter a próxima carta.

a) Determine as 4 cartas que vêm após o três de copas na pilha de Si Stebbins.

b) Com essa organização de cartas um mágico (e matemático) pode descobrir uma carta desconhecida sabendo qual carta vem antes ou qual carta vem depois na pilha de cartas. Determine quais cartas vêm antes e depois das cartas a seguir:

b1) Cinco de Espadas (5♠);

b2) Dois de Paus (2♣).

c) Suponha que os reis sejam retirados do baralho e que as contas devam ser feitas de 1 a 12, ou seja, se o número passar de 12 deve-se subtrair 12 do número. Prove que, independentemente da carta inicial, não será possível fazer a pilha de Si Stebbins somando de 3 em 3 nos números das cartas.

d) Agora suponha que as cartas mais altas sejam retiradas do baralho e que as contas devam ser feitas de 1 a n, em que n é um número inteiro entre 2 e 12, inclusive. Seguimos com o mesmo procedimento: se o número passar de n deve-se subtrair n do número. Para que valores de n é possível fazer a pilha de Si Stebbins somando de 3 a 3 nos números das cartas? Não se esqueça de justificar sua resposta, ou seja, explicar por que os valores que você descobriu funcionam e por que os outros valores não funcionam.

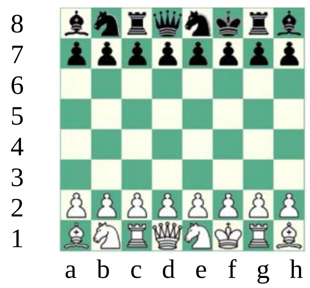
PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

O Xadrez de Fischer, também conhecido como Fischer Random Chess ou Chess 960 (guarde este nome) é uma variação do jogo de xadrez criada pelo enxadrista Robert James “Bobby” Fischer (1943-2008), campeão mundial em 1972-75 e considerado por muitos o melhor enxadrista da história. Nesta variação são usados o mesmo tabuleiro e as mesmas peças do xadrez padrão, mas as posições iniciais variam obedecendo certas regras. Com essas variações a memorização de aberturas (sequências de movimentos iniciais em partidas) perde espaço e a criatividade se torna mais importante.

Basta definir as posições das peças da cor branca, já que as peças da cor preta são colocadas em posições simétricas, como mostra a figura. Os peões brancos devem ocupar a linha 2. As outras oito peças (um rei, uma rainha, dois bispos, dois cavalos e duas torres) devem ocupar a linha 1 de acordo com as seguintes duas regras:

I. o rei fique entre as duas torres;
II. os bispos fiquem em casas de cores diferentes.

A seguir um exemplo de configuração inicial, em que na linha 1, da esquerda para a direita, temos bispo (♗), cavalo (♘), torre (♖), rainha (♕), cavalo, rei (♔), torre, bispo. Os peões (♙) estão na linha 2.

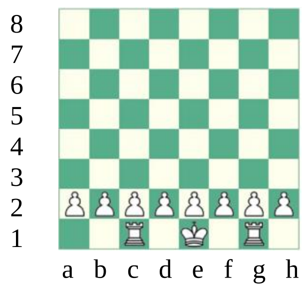


Estamos interessados em saber o número de disposições iniciais possíveis para as peças do Xadrez de Fischer.

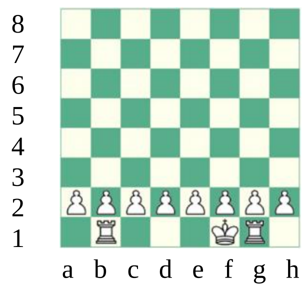
Em geral, em problemas de contagem vale a pena começar pensando em como satisfazer as restrições primeiro. Como há duas regras, há duas restrições. Com qual é melhor começar?

a) Suponha que começaremos colocando na linha 1 apenas o rei, as duas torres e a rainha, seguindo a regra I. É sempre possível colocar as outras quatro peças seguindo a regra II? Não se esqueça de que você deve justificar suas respostas.

b) Suponha que colocamos o rei e as duas torres nas seguintes duas disposições:



Disposição X



Disposição Y

De quantas maneiras podemos escolher as posições do bispo da casa branca e do bispo da casa preta em cada disposição?

c) Os itens a e b mostram que começar colocando o rei e as duas torres altera o número de maneiras de colocar as demais peças, complicando nosso processo de contagem.

Uma forma mais simples de contar o número de variações do Xadrez de Fischer é escolher as posições das peças na seguinte ordem:

1º) bispo da casa preta
2º) bispo da casa branca
3º) rainha
4º) os dois cavalos
5º) rei e torres

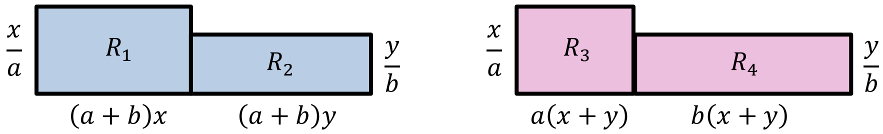
Existem quantas disposições iniciais possíveis para o Xadrez de Fischer? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

À medida que você se torna mais experiente nas competições de matemática você acumula ferramentas e entre estas estão os *lemas*. Em Matemática, lemas são teoremas que podem ser usados para resolver problemas ou demonstrar outros teoremas. Nesse problema estudaremos o *Lema de Titu*, uma desigualdade que ficou conhecida por esse nome em homenagem ao professor romeno Titu Andreescu, autor de vários livros de olimpíada de matemática e líder dos Estados Unidos na IMO (Olimpíada Internacional de Matemática) de 1995 até 2002.

Nesse problema iremos descobrir e provar esse lema a partir de uma abordagem geométrica.

a) Na figura a seguir, a, b, x, y são reais positivos com $\frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$. Considere os retângulos R_1, R_2, R_3 e R_4 a seguir. Escreva expressões em função de a, b, x e y para as áreas dos retângulos R_1, R_2, R_3 e R_4.



b) A partir da desigualdade $\frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$ mostre que a soma das áreas dos retângulos R_1 e R_2 é maior que ou igual à soma das áreas dos retângulos R_3 e R_4. A partir dessa observação demonstre o *lema de Titu*:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$$

(O que acontece se $\frac{x}{a} \leq \frac{y}{b}$? Então $\frac{y}{b} \geq \frac{x}{a}$ e vale $\frac{y^2}{b} + \frac{x^2}{a} \geq \frac{(y+x)^2}{b+a}$, que é a mesma coisa! Ou seja, o lema de Titu vale para todos os reais positivos a, b, x, y!)

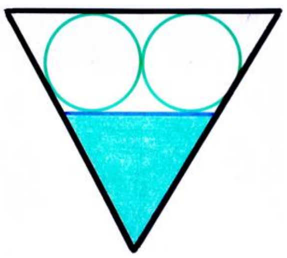
c) Usando o Lema de Titu para dois termos, prove o Lema de Titu para três termos, ou seja, para quaisquer reais positivos a, b, c, x, y e z, prove que

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

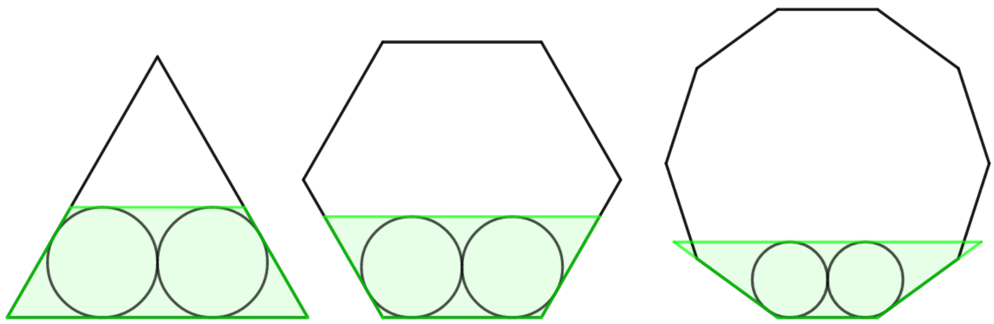
É possível generalizar o Lema de Titu para $n \geq 2$ termos, mas você não precisa fazer isto nesta questão.

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Catriona Agg é uma professora de Matemática em Cambridge, no Reino Unido, que posta frequentemente no Twitter (@CShearer41) quebra-cabeças geométricos, desenhados à mão. Um deles é o seguinte: encontrar que fração está pintada no triângulo equilátero a seguir.



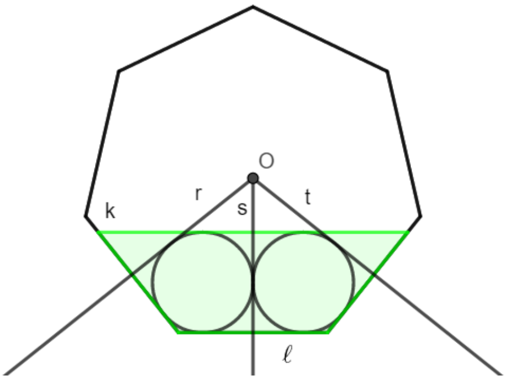
A resposta é bonita, e inspirou Diego Rattaggi, um matemático suíço, a generalizar o problema da seguinte maneira: Dado um polígono regular P de n lados, trace em seu interior duas circunferências de mesmo raio tangentes externamente entre si e a dois lados consecutivos de P, e em seguida a tangente comum paralela ao lado ℓ tangente às duas circunferências. Encontre a razão entre a área do trapézio T delimitado pela faixa que contém as duas circunferências e pelas retas que contêm os lados vizinhos ao lado ℓ e a área de P. A seguir exibimos o problema para $n = 3$, $n = 6$ e $n = 10$ (para o qual o trapézio T não está mais contido em P).



Nos itens a seguir você pode usar uma figura como referência, como o heptágono, mas suas respostas devem se referir a um polígono regular de n lados.

a) Dado o polígono regular P, de n lados, seja O o centro de P, e trace as três retas r, s e t tangentes às duas circunferências, em que s é a tangente interna comum. Mostre que essas três retas passam pelos pontos médios dos três lados que são tangentes a pelo menos uma das circunferências.

Nessa questão você pode querer utilizar que um ponto A no interior do ângulo $\angle XYZ$ está sobre a bissetriz interna desse ângulo se, e somente se, A é equidistante às retas YX e YZ.



b) As três retas r, s e t cortam o trapézio T em dois pentágonos congruentes e dois triângulos congruentes U e V. Seja k a reta que contém o lado do trapézio paralelo ao lado ℓ. Mostre que os triângulos U e V e os triângulos determinados pelos trios de retas $\{k, r, s\}$ e $\{k, s, t\}$ são congruentes.

c) Encontre, em função de n, a razão $\frac{\text{área}(T)}{\text{área}(P)}$.

A professora Catriona também tem um livro, *Geometry Puzzles in Felt Tip* (publicada sob seu nome de solteira, Catriona Shearer). Se você gostou desse problema, há muitos mais de onde esse veio (como o problema 1!).

PROBLEMA 7 – $\boxed{\textbf{Valor: 5 pontos}}$

Um problema famoso da Matemática é determinar quais inteiros positivos são a soma de dois quadrados perfeitos, não necessariamente distintos. A identidade $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$ essencialmente reduz o problema a números primos, ou seja, a verificar quais primos podem ser escritos como soma de dois quadrados. Por exemplo, $2 = 1^2 + 1^2$, $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$ e $17 = 4^2 + 1^2$, enquanto 3, 7 e 11 não podem ser escritos como soma de dois quadrados.

a) Sendo p primo ímpar tal que $p = a^2 + b^2$, então um dos números a, b é par e o outro é ímpar. Suponha que a é par e b é ímpar. Mostre que p deve ser da forma $4k+1$, k inteiro.

O item a exclui todos os primos da forma $4k+3$, ou seja, 3, 7, 11 etc. E os primos p da forma $4k+1$? O item a não prova nem que é possível nem que é impossível escrever esses primos como soma de dois quadrados. Veremos que é possível.

Para isso, considere $S = \left\{\{\{a,b\}\} \text{ tal que } p - 4ab = n^2 \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}_+^*, \text{com } a \in \mathbb{Z}_+^* \text{ e } b \in \mathbb{Z}_+^*\right\}$. Aqui, $\{\{a,b\}\}$ é um *multiconjunto*, ou seja, $\{\{a,b\}\} = \{\{b,a\}\}$ e $\{\{a,a\}\}$ tem dois elementos, ambos iguais a a. Por exemplo, se $p = 41$, $S = \left\{\{\{1;4\}\}, \{\{2;2\}\}, \{\{1;8\}\}, \{\{2;4\}\}, \{\{1;10\}\}, \{\{2;5\}\}\right\}$.

b) Determine o conjunto S para $p = 37$.

c) Mostre que se $p - 4ab = n^2$, então os números $p - 4a(b-a+n)$ e $p - 4a(b-a-n)$ também são quadrados perfeitos.

d) Pode-se provar que, se $p - 4ab = n^2$, os números $p - 4b(a-b+n)$ e $p - 4b(a-b-n)$ também são quadrados perfeitos. Assim, mostre que se $\{\{a,b\}\}$ pertence a S então exatamente metade dos multiconjuntos $\{\{a, b-a+n\}\}$, $\{\{a, b-a-n\}\}$, $\{\{b, a-b+n\}\}$, $\{\{b, a-b-n\}\}$ pertence a S. Lembre-se de que os multiconjuntos de S devem ter elementos positivos.

Conecte uma flecha $\mapsto$ de $\{\{a,b\}\}$ aos multiconjuntos de S descritos acima. Por exemplo, para $p = 41$:

$$\{\{1;4\}\} \mapsto \{\{1;8\}\};\ a = 1, b = 4, n = 5 \text{ e } b - a + n = 8$$
$$\{\{1;4\}\} \mapsto \{\{2;4\}\};\ a = 1, b = 4, n = 5 \text{ e } a - b + n = 2$$

e) Quando os multiconjuntos $\{\{a, b-a+n\}\}$, $\{\{a, b-a-n\}\}$, $\{\{b, a-b+n\}\}$, $\{\{b, a-b-n\}\}$ são na verdade dois multiconjuntos distintos em vez de quatro?

f) Mostre que se $\{\{a,b\}\} \mapsto \{\{a,c\}\}$ então $\{\{a,c\}\} \mapsto \{\{a,b\}\}$. Por isso, podemos escrever $\{\{a,b\}\} \leftrightarrow \{\{a,c\}\}$.

g) Para cada p, encontre todos os multiconjuntos $A = \{\{a,b\}\}$ tais que $A \leftrightarrow A$, ou seja, que mandam flechas para si mesmos.

Note que os multiconjuntos de S que satisfazem o item e ou o item g são os únicos que mandam somente uma flecha para um conjunto diferente dele mesmo.

Começando de $A_0 = \left\{\left\{1; \frac{p-1}{4}\right\}\right\}$, fazemos uma cadeia $A_0 \leftrightarrow A_1 \leftrightarrow \cdots$ de multiconjuntos até obter um multiconjunto da forma $\{\{a,a\}\}$.

Para $p = 41$, temos $\{\{1;10\}\} \leftrightarrow \{\{1;8\}\} \leftrightarrow \{\{1;4\}\} \leftrightarrow \{\{2;4\}\} \leftrightarrow \{\{2;5\}\} \leftrightarrow \{\{2;2\}\}$. Note que, substituindo na equação $p - 4ab = n^2$ obtemos $41 = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 5^2 = 4^2 + 5^2$, ou seja, 41 é a soma de dois quadrados.

h) Mostre que tal cadeia existe para todo primo da forma $p = 4k+1$ e conclua que p é a soma de dois quadrados.