XLIV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (novembro de 2020)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- **Nesta prova há 7 problemas. Você deve resolver 5 problemas.**

Caso você resolva mais de 5 problemas, sua nota é a soma das 5 maiores pontuações obtidas. Isso também vale para pontuações parciais.

- A duração da prova é de 4h30min.
- Escreva na primeira página da sua prova o horário em que você começou a prova e o horário em que você terminou a prova.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**.
- Somente serão aceitas resoluções feitas **à mão, a tinta ou a lápis**; que estejam **legíveis**. Soluções digitadas ou ilegíveis **não** serão consideradas.
- Em dispositivos eletrônicos, os únicos usos permitidos são:
  (1) leitor de arquivos somente para visualizar os enunciados;
  (2) calculadora sem acesso à Internet.
- Não é permitido nenhum tipo de consulta, incluindo qualquer tipo de material físico (por exemplo, cadernos e livros) ou eletrônico/Internet.

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Você já assistiu ao filme Velozes e Furiosos 6 de 2013? O comitê elaborador de provas da OPM estava assistindo a esse filme e notou que durante um trecho relativamente longo do filme há um avião de carga e vários carros interagindo em alta velocidade em uma pista de pouso. E surgiu a pergunta: qual seria o comprimento dessa pista para essa cena durar tanto assim?

Vamos estimar esse comprimento usando algumas informações da matéria "How long is the runway in Fast & Furious 6?" do site da BBC (procure depois da prova!). Segundo a matéria, a cena em alta velocidade durou 13 minutos e a velocidade de aviões de carga em pistas de pouso é, em geral, 240 km/h.

a) A partir desses valores, qual é o comprimento aproximado da pista dessa cena?

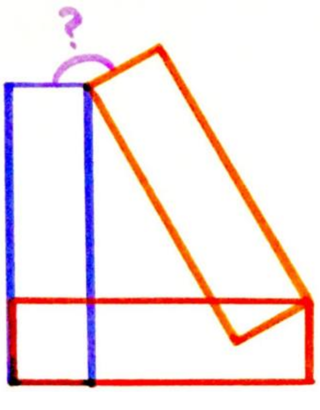
b) A maior pista de pouso do aeroporto de Guarulhos tem 3700 metros de comprimento. O comprimento calculado no item a seria equivalente a quantas destas pistas do aeroporto de Guarulhos?

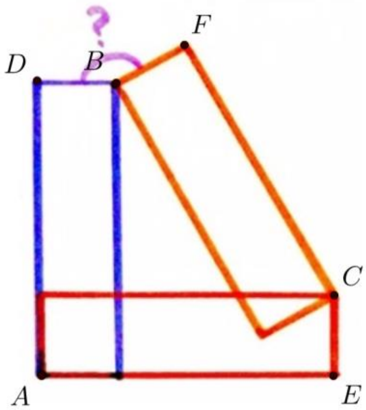
c) A matéria da BBC faz outras considerações antes de calcular sua estimativa do comprimento da pista, que deu 29,6 km (não se assuste, era para ser diferente da sua resposta do item a mesmo!). Entre outras informações estão o relato do ator The Rock sobre a velocidade ser de aproximadamente 185 km/h durante as gravações e também o fato de que ações acontecem ao mesmo tempo, mas para o espectador acontecem em sequência, como por exemplo uma luta entre vilão e mocinho que aparece durante a corrida.

Considerando a velocidade média que o ator citou, por quantos minutos o avião esteve efetivamente na pista no filme?

PROBLEMA 2 – Valor: 3 pontos

Catriona Agg é uma professora de Matemática em Cambridge, no Reino Unido, que posta frequentemente no Twitter (@CShearer41) quebra-cabeças geométricos, desenhados à mão. Um deles, exibido na figura da esquerda, é calcular o ângulo marcado, sabendo que os três retângulos são idênticos. Para resolver esses problemas usaremos os nomes para os pontos indicados na figura da direita.





a) Prove que o triângulo ABC tem todos seus lados iguais, ou seja, é equilátero.

b) Determine as medidas dos ângulos do triângulo ABD.

c) Calcule o ângulo $\angle DBF$ marcado com ?.

A professora Catriona também tem um livro, *Geometry Puzzles in Felt Tip* (publicada sob seu nome de solteira, Catriona Shearer). Se você gostou desse problema, há muitos mais de onde esse veio.

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Desde setembro de 2018, as placas de identificação de veículos no Brasil passaram a seguir um novo sistema de formação. Ainda em implantação gradativa, os dois sistemas alfanuméricos coexistem: o atual, com quatro letras (`A` a `Z`, sem acentos nem cedilhas, num total de 26 possibilidades em cada posição) e três números (`0` a `9`, num total de 10 possibilidades em cada posição), no formato $L_1L_2L_3N_1L_4N_2N_3$, no qual `L´s` representam letras e `N´s` representam números, denominado Placa de Identificação Veicular – PIV e também conhecido "Padrão Mercosul", e o anterior, não mais emitido, mas ainda válido, com três letras e quatro dígitos, no formato $L_1L_2L_3\ N_1N_2N_3N_4$, que iniciou-se em 1990.

a) Uma das razões para a implantação do novo sistema é o aumento da quantidade de placas de identificação. Calcule quantas placas podem ser geradas no Padrão Mercosul.

b) Diferentemente de outras mudanças de sistemas de emplacamento, na mudança para o Padrão Mercosul os veículos já emplacados no sistema anterior mantêm as combinações anteriores de letras, trocando o segundo dígito por uma letra conforme a tabela a seguir:

Segundo dígito da placa	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quarta letra da placa Mercosul	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Por exemplo, a antiga placa `XYZ 1234` terá como equivalente a placa do Padrão Mercosul `XYZ1C34`. Veja que o dígito `2` foi substituído pela letra `C`. Essa correspondência pode permitir a conversão dos emplacamentos e a coexistência entre os dois sistemas.

Calcule o percentual das placas do Padrão Mercosul que têm correspondência com o sistema antigo de emplacamento, sabendo que as placas no padrão anterior com final `0000` não são usadas. Suponha que não há outras restrições com relação às letras e números em ambos os padrões (em particular, placas Padrão Mercosul podem terminar em "zero letra zero zero", como por exemplo `EEE0E00`).

c) Estima-se que a frota nacional de veículos era de 58,8 milhões de veículos em 2019 e deve crescer 2,6% em 2020. Além disso, cerca de 30% da frota está no estado de São Paulo, tanto em 2019 como em 2020.

Seria possível utilizar apenas placas no Padrão Mercosul com as letras iniciais `OPM` para emplacar os veículos correspondentes ao crescimento estimado da frota no estado de São Paulo de 2019 para 2020?

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

A *pilha de cartas de Si Stebbins* é uma organização das 52 cartas do baralho baseada numa regra matemática. Ela foi popularizada pelo mágico (e matemático) Si Stebbins. As cartas são ordenadas de modo que sempre alternam os naipes seguindo a ordem **CHaSeD** usando os nomes dos naipes em inglês: **C**lubs (em português, Paus ♣), **H**earts (Copas ♥), **S**pades (Espadas ♠) e **D**iamonds (Ouros ♦). E o número de cada carta soma 3 no número anterior, sendo Ás (A) considerado o número 1, Valete (J) considerado o número 11, Dama (Q) considerado 12 e o Rei (K) considerado o número 13. Se a soma passar de 13, então deve-se subtrair o número 13 do valor para obter o número da próxima carta. Com essas regras, cada uma das 52 cartas aparece exatamente uma vez na pilha.

Por exemplo, na pilha de Si Stebbins o Ás de Paus (A♣) vem seguido de quatro de copas (4♥), sete de espadas (7♠), dez de ouros (10♦), rei de paus (K♣) e três de copas (3♥). Nesse último passo a soma seria $13 + 3 = 16$ e como passou de 13 devemos subtrair 13 para obter a próxima carta.

a) Determine as 4 cartas que vêm após o três de copas na pilha de Si Stebbins.

b) Com essa organização de cartas um mágico (e matemático) pode descobrir uma carta desconhecida sabendo qual carta vem antes ou qual carta vem depois na pilha de cartas. Determine quais cartas vêm antes e depois das cartas a seguir:

b1) Cinco de Espadas (5♠);

b2) Dois de Paus (2♣).

c) Suponha que os reis sejam retirados do baralho e que as contas devam ser feitas de 1 a 12, ou seja, se o número passar de 12 deve-se subtrair 12 do número. Prove que, independentemente da carta inicial, não será possível fazer a pilha de Si Stebbins somando de 3 em 3 nos números das cartas.

d) Agora suponha que as cartas mais altas sejam retiradas do baralho e que as contas devam ser feitas de 1 a n, em que n é um número inteiro entre 2 e 12, inclusive. Seguimos com o mesmo procedimento: se o número passar de n deve-se subtrair n do número. Para que valores de n é possível fazer a pilha de Si Stebbins somando de 3 a 3 nos números das cartas? Não se esqueça de justificar sua resposta, ou seja, explicar por que os valores que você descobriu funcionam e por que os outros valores não funcionam.

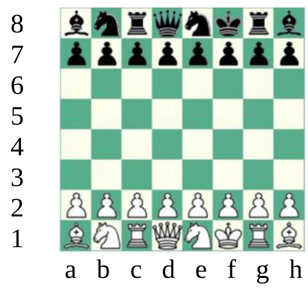
PROBLEMA 5 – Valor: 3 pontos

O Xadrez de Fischer, também conhecido como Fischer Random Chess ou Chess 960 (guarde este nome) é uma variação do jogo de xadrez criada pelo enxadrista Robert James "Bobby" Fischer (1943-2008), campeão mundial em 1972-75 e considerado por muitos o melhor enxadrista da história. Nesta variação são usados o mesmo tabuleiro e as mesmas peças do xadrez padrão, mas as posições iniciais variam obedecendo certas regras. Com essas variações a memorização de aberturas (sequências de movimentos iniciais em partidas) perde espaço e a criatividade se torna mais importante.

Basta definir as posições das peças da cor branca, já que as peças da cor preta são colocadas em posições simétricas, como mostra a figura. Os peões brancos devem ocupar a linha 2. As outras oito peças (um rei, uma rainha, dois bispos, dois cavalos e duas torres) devem ocupar a linha 1 de acordo com as seguintes duas regras:

I. o rei fique entre as duas torres;
II. os bispos fiquem em casas de cores diferentes.

A seguir um exemplo de configuração inicial, em que na linha 1, da esquerda para a direita, temos bispo (♗), cavalo (♘), torre (♖), rainha (♕), cavalo, rei (♔), torre, bispo. Os peões (♙) estão na linha 2.

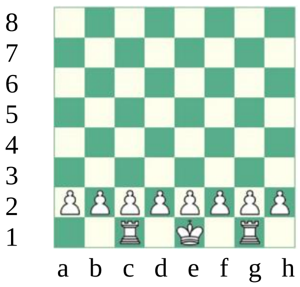


Estamos interessados em saber o número de disposições iniciais possíveis para as peças do Xadrez de Fischer.

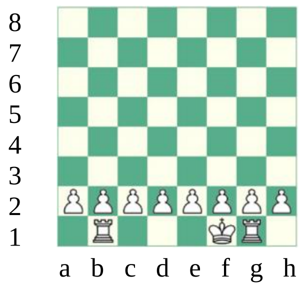
Em geral, em problemas de contagem vale a pena começar pensando em como satisfazer as restrições primeiro. Como há duas regras, há duas restrições. Com qual é melhor começar?

a) Suponha que começaremos colocando na linha 1 apenas o rei, as duas torres e a rainha, seguindo a regra I. É sempre possível colocar as outras quatro peças seguindo a regra II? Não se esqueça de que você deve justificar suas respostas.

b) Suponha que colocamos o rei e as duas torres nas seguintes duas disposições:



Disposição X



Disposição Y

De quantas maneiras podemos escolher as posições do bispo da casa branca e do bispo da casa preta em cada disposição?

c) Os itens a e b mostram que começar colocando o rei e as duas torres altera o número de maneiras de colocar as demais peças, complicando nosso processo de contagem.

Uma forma mais simples de contar o número de variações do Xadrez de Fischer é escolher as posições das peças na seguinte ordem:

1º) bispo da casa preta
2º) bispo da casa branca
3º) rainha
4º) os dois cavalos
5º) rei e torres

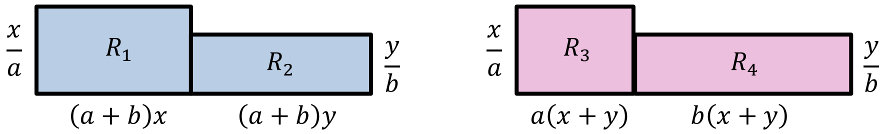
Existem quantas disposições iniciais possíveis para o Xadrez de Fischer? Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 6 – $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

À medida que você se torna mais experiente nas competições de matemática você acumula ferramentas e entre estas estão os *lemas*. Em Matemática, lemas são teoremas que podem ser usados para resolver problemas ou demonstrar outros teoremas. Nesse problema estudaremos o *Lema de Titu*, uma desigualdade que ficou conhecida por esse nome em homenagem ao professor romeno Titu Andreescu, autor de vários livros de olimpíada de matemática e líder dos Estados Unidos na IMO (Olimpíada Internacional de Matemática) de 1995 até 2002.

Nesse problema iremos descobrir e provar esse lema a partir de uma abordagem geométrica.

a) Na figura a seguir, a, b, x, y são reais positivos com $\frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$. Considere os retângulos R_1, R_2, R_3 e R_4 a seguir. Escreva expressões em função de a, b, x e y para as áreas dos retângulos R_1, R_2, R_3 e R_4.



b) A partir da desigualdade $\frac{x}{a} \geq \frac{y}{b}$ mostre que a soma das áreas dos retângulos R_1 e R_2 é maior que ou igual à soma das áreas dos retângulos R_3 e R_4. A partir dessa observação demonstre o *lema de Titu*:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}$$

(O que acontece se $\frac{x}{a} \leq \frac{y}{b}$? Então $\frac{y}{b} \geq \frac{x}{a}$ e vale $\frac{y^2}{b} + \frac{x^2}{a} \geq \frac{(y+x)^2}{b+a}$, que é a mesma coisa! Ou seja, o lema de Titu vale para todos os reais positivos a, b, x, y!)

c) Usando o Lema de Titu para dois termos, prove o Lema de Titu para três termos, ou seja, para quaisquer reais positivos a, b, c, x, y e z, prove que

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

É possível generalizar o Lema de Titu para $n \geq 2$ termos, mas você não precisa fazer isto nesta questão.

PROBLEMA 7 – $\boxed{\textbf{Valor: 4 pontos}}$

Chrono é um tipo de quebra-cabeça criado por François Robillard. Nessa questão vamos discutir algumas estratégias para resolvê-lo. Cada casa de um tabuleiro 5×5 está preenchida com um número inteiro positivo. Um desses números está destacado. Com o número destacado como ponto de início, você deve ligar os 25 números do diagrama com uma linha que passe por cada casa uma só vez.

Para fazer as ligações a seguinte regra deve ser obedecida: você deve utilizar dois números que sejam horizontal, vertical ou diagonalmente adjacentes para realizar uma das quatro operações $(+, -, \times, \div)$; o terceiro número deve ser adjacente (horizontal, vertical ou diagonalmente) ao segundo e igual ao resultado da operação. Esse terceiro número será, então, o primeiro número de uma próxima operação e assim sucessivamente.

Por exemplo, uma solução do quebra-cabeça na Figura 1 está na Figura 2.

9	9	27	6	7
18	3	6	2	42
4	2	54	12	2
4	16	8	2	40
8	32	24	4	10

Figura 1

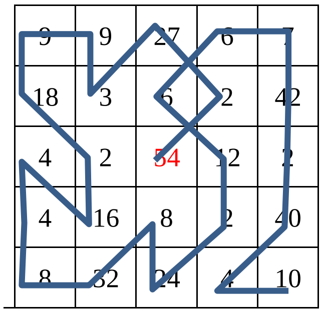


Figura 2

em que: $54 \div 2 = 27$, $27 \div 3 = 9$, $9 + 9 = 18$, $18 - 2 = 16$, $16 \div 4 = 4$, $4 \times 8 = 32$, $32 - 8 = 24$, $24 \div 2 = 12$, $12 - 6 = 6$, $6 \times 7 = 42$, $42 - 2 = 40$, $40 \div 4 = 10$, ou seja, os números são visitados na ordem

$$54 \to 2 \to 27 \to 3 \to 9 \to 9 \to 18 \to 2 \to 16 \to 4 \to 4 \to 8 \to 32$$
$$\to 8 \to 24 \to 2 \to 12 \to 6 \to 6 \to 7 \to 42 \to 2 \to 40 \to 4 \to 10.$$

Os números em azul são resultados de operações.

Falando agora sobre possíveis estratégias, vale a pena olhar inicialmente para os números que estão nos cantos ou adjacentes ao número inicial, pois há menos opções de operações para eles. Também merecem atenção os números primos, pois possuem limitações com relação às operações de multiplicação e divisão. Limitações similares costumam ocorrer para os menores/maiores números na tabela também.

Por exemplo, no quebra-cabeça mostrado anteriormente, podemos concluir que 42 é o resultado de uma operação. Vejamos. Para ser o segundo número em uma, essa operação não poderia ser uma subtração (o resultado seria negativo) ou divisão (o resultado seria menor do que 1). Porém, como ele é o maior número entre todos os que são adjacentes a ele, a operação também não pode ser uma adição ou subtração. Assim, 42 é o resultado de uma operação.
Observemos agora o número 7, vamos provar que ele deve ser o segundo número em uma operação. Para 7 ser o resultado de uma operação, como ele está no canto

27	6	7
6	2	42
54	12	2

alguma operação envolvendo os números (na ordem apresentada) 54 e 2; 12 e 2; 12 e 42; 6 e 2; 6 e 6; 2 e 2; 2 e 42; 27 e 2; 27 e 6 deveria dar 7. Nenhuma dá. Logo 7 é um segundo número e as únicas possibilidades são $6 \times 7 = 42$ ou $42 \div 7 = 6$. Obtemos assim uma (pequena) parte da resolução

27	6	7
6	2	42
54	12	2

Com esse tipo de raciocínio já costuma ser possível eliminar certos números como resultados de operações e estabelecer "pedaços" das ligações, o que simplifica bastante a resolução do quebra-cabeça. Ou até mesmo descobrir o último número que é ligado o que possibilita uma abordagem de solução de "trás para frente".

Vamos resolver um quebra-cabeça agora.

24	36	25	63	1
60	11	7	9	64
6	9	2	8	8
19	10	10	80	72
9	28	90	18	8

No que se segue, chamaremos de *resultado* um número que é resultado de uma operação e de *número do meio* um número que é utilizado em uma operação, mas não é resultado de operação alguma. No primeiro exemplo, em que a ordem é

$$54 \to 2 \to 27 \to 3 \to 9 \to 9 \to 18 \to 2 \to 16 \to 4 \to 4 \to 8 \to 32$$
$$\to 8 \to 24 \to 2 \to 12 \to 6 \to 6 \to 7 \to 42 \to 2 \to 40 \to 4 \to 10,$$

todo número em azul (como 27, 16 e 32) é resultado e todo número preto (como ambos os 8 e o 7) é número do meio. Não faremos tal classificação para o número inicial.

a) Mostre que o 28 não pode ser número do meio.
b) Encontre todas as possibilidades de ligar 28 no tabuleiro sendo ele um resultado (desenhe todos os caminhos no tabuleiro para cada possibilidade). Não se esqueça de justificar por que só há essas possibilidades!
c) Mostre que o 28 é necessariamente o último número a ser ligado.
d) Prove que 60 é resultado e que 6 é número do meio.
e) Resolva o quebra-cabeça. Pode-se mostrar que essa solução é a única possível (você não precisa fazer isso).