XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (05 de outubro de 2019)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

A operação *insere e soma* toma um número inteiro positivo de dois ou mais algarismos, insere um sinal de $+$ entre dois de seus algarismos e troca o número pelo resultado da adição. Por exemplo, começando com o número 3097 podemos realizar a operação para obter $3 + 097 = 100$. Podemos repetir esse processo até obter um número de um algarismo. Começando com 3097 podemos obter um número de um algarismo com duas operações:

$$3097 \to 3 + 097 = 100 \to 1 + 00 = 1$$

A seguir reduzimos o número 123456 a um número de um algarismo com 5 operações:

$$123456 \to 12345 + 6 = 12351 \to 123 + 51 = 174 \to 1 + 74 = 75 \to 7 + 5 = 12 \to 1 + 2 = 3$$

a) Mostre uma maneira de reduzir 123456 a um número de um algarismo com 3 operações.

Para cada n chamaremos de $a(n)$ o menor número a partir do qual não é possível chegar num número de um algarismo com menos que n operações. Por exemplo, temos $a(2) = 19$, pois partindo do 19 precisamos de pelo menos duas operações para chegar num número de um algarismo e para qualquer número menor que 19 basta uma operação ou nenhuma (número de um algarismo). Sabe-se que os três primeiros termos desta sequência são $a(1) = 10$, $a(2) = 19$ e $a(3) = 118$.

b) Mostre que duas ou menos operações são suficientes para reduzir qualquer número inteiro positivo menor do que 118 a um número de um algarismo.

Uma ferramenta muito útil quando trabalhamos com algarismos é observar o resto na divisão por 9. No caso da operação insere e soma sabe-se que o resto na divisão por 9 não se altera a cada operação. Veja que no exemplo iniciado com 123456 vemos que todos os números que apareceram deixaram resto 3 na divisão por 9.

c) Dizemos que um número inteiro positivo é uma *potência perfeita* se é igual a x^y com x inteiro positivo e y inteiro maior que 1. Por exemplo, $2^3 = 8$ e $5^2 = 25$ são potências perfeitas. Prove que partindo de uma potência perfeita é impossível chegar ao número 2019 após uma ou mais operações.

d) Encontre uma potência perfeita tal que a partir dela e algumas operações é possível chegar ao número 43.

PROBLEMA 2

Em probabilidade, dizemos que dois eventos A e B são *independentes* quando a probabilidade de ocorrer A e B é igual ao produto das probabilidades de ocorrer A e de ocorrer B. Simbolicamente,

$$A \text{ e } B \text{ são independentes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Também podemos definir independência entre mais de dois eventos. Dizemos que um conjunto S de eventos é *mutuamente independente* quando a probabilidade da ocorrência de qualquer subconjunto de S é igual ao produto dos eventos individuais do subconjunto. Por exemplo, três eventos A, B e C são mutuamente independentes quando

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B); \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C); \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C);$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

a) Considere o experimento de sortear um número ao acaso do conjunto $\{1; 2; 3; 4\}$. Cada número tem a mesma chance de ser sorteado. Defina os eventos:
- A: “sortear um número par”;
- B: “sortear um número primo” (lembre-se de que 1 não é primo!);
- C: “sortear um número estritamente menor do que 3”.

a.1) Calcule $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ e $P(A \cap B \cap C)$.
a.2) Mostre que se A e B são independentes, A e C são independentes, e B e C são independentes, então não necessariamente A, B e C são mutuamente independentes.

Uma aplicação curiosa de probabilidade é no cálculo de $\varphi(n)$ que para cada inteiro $n \geq 2$ é igual à quantidade de números do conjunto $A_n = \{1,2,\dots,n-1,n\}$ que não possuem fatores em comum com n. Veja que a probabilidade de escolhendo ao acaso um número de A_n obter um número sem fatores em comum com n é $\frac{\varphi(n)}{n}$.

b) Seja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ a fatoração de n em potências de primos. Qual é a probabilidade de escolhendo ao acaso um número de A_n obter um número que **não** é divisível por p_1?

c) Pode-se provar que o conjunto de eventos **não** ser divisível por p_i em A_n para cada $i = 1,2,\dots,k$ é mutuamente independente. A partir desse fato (você não precisa prová-lo nessa prova) determine uma fórmula para $\varphi(n)$ usando os fatores primos de n e calcule $\varphi(2019)$.

PROBLEMA 3
Uma formiga de dimensões desprezíveis (foi mal, formiga) começa a caminhar na ponta esquerda de uma corda elástica, em direção à ponta direita. A velocidade da formiga é constante e igual a 1 cm/s. A cada segundo a formiga caminha 1 cm, e imediatamente após essa caminhada a corda estica homogeneamente. Isso quer dizer que a formiga também vai imediata e proporcionalmente para a direita com a corda. Por exemplo, se ela estava bem no meio da corda antes de ela esticar, ela continua no meio da corda depois.

Sejam L_0 o comprimento inicial da corda e L_n o comprimento, em cm, da corda após n segundos (e, portanto, n "esticadas"). Queremos a distância d_n, em cm, da ponta esquerda da corda que a formiga está após n segundos.
a) Mostre que $d_n = \frac{L_n}{L_{n-1}}(d_{n-1} + 1)$ se $d_n \leq L_n$.
Estamos interessados em saber para quais sequências de L_i, $i = 1,2,\dots$ a formiga consegue chegar à ponta direita da corda. Para tanto, é mais conveniente calcular a razão $r_n = \frac{d_n}{L_n}$ e verificar se essa razão pode ser maior ou igual a 1.
b) Mostre que $r_n = \frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} + \cdots + \frac{1}{L_{n-1}}$.
c) Suponha que $L_0 = 100$ (ou seja, a corda tem inicialmente 1 metro) e que a cada segundo ela cresça 1 metro. Mostre que a formiga consegue chegar à outra ponta da corda e estime o tempo em que consegue fazer isso.
Você pode querer utilizar o fato de que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \cong \ln n,$$

em que $\ln n = \log_e n$, *e* $\cong 2{,}72$.
d) Suponha agora que $L_0 = 3$ (ou seja, a corda tem inicialmente 3 cm) e a corda dobre de tamanho a cada segundo. Mostre que a formiga não consegue chegar à outra ponta da corda.

Algumas teorias da expansão cosmológica do universo usam o modelo descrito acima para verificar se galáxias muito distantes podem ser observadas. No caso, a formiga representa a luz emanando da galáxia e as pontas das cordas representam a galáxia (na esquerda) e a Terra (na direita). A velocidade da formiga é a velocidade da luz e a corda esticando representa a expansão do universo. Muitas teorias supõem que o universo se expande de modo quase exponencial; em outras palavras, a distância entre a galáxia e a Terra é, a cada segundo, multiplicada por uma constante $k > 1$.
e) Supondo que o universo se expande exatamente de modo exponencial, mostre que galáxias suficientemente distantes da Terra nunca poderão ser observadas.

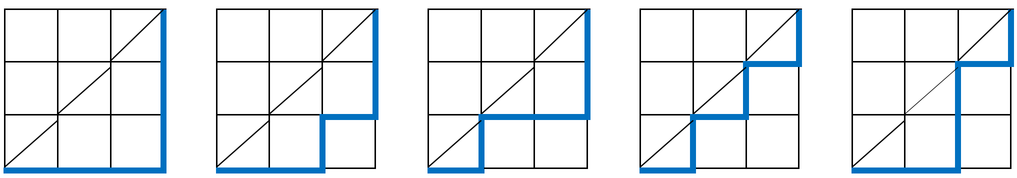
PROBLEMA 4
Os *números de Catalan* contam a quantidade de caminhos que ligam o canto inferior esquerdo ao canto superior direito de um quadrado $n \times n$ que satisfazem às seguintes condições:

- O caminho consiste em $2n$ movimentos, cada um sendo de uma unidade para a direita (→) ou uma unidade para cima (↑);
- O caminho nunca fica acima da diagonal que liga o início ao final do caminho.

Pode-se provar (não faça isso agora, faça em casa!) que tal quantidade é

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad n \geq 0.$$

A seguir exibimos os $C_3 = \frac{1}{3+1}\binom{2\cdot 3}{3} = 5$ caminhos em um quadrado 3×3:



Nesse problema, estamos interessados no determinante da matriz cujas entradas são os números de Catalan; sendo mais preciso, $a_{ij} = C_{i+j-2}$:

$$A_n = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \dots & C_{n-1} \\ C_1 & C_2 & C_3 & \dots & C_n \\ C_2 & C_3 & C_4 & \dots & C_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \dots & C_{2n-2} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix}$.

A definição de determinante nos diz que o determinante de uma matriz quadrada é a soma de $n!$ produtos de n termos, um de cada linha e cada coluna, multiplicado por $(-1)^v$, em que v é a *quantidade de inversões* e é definida da seguinte forma: sendo $a_{1i_1}a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ o produto, considere a sequência $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, que é uma permutação de $(1,2, \dots, n)$; v é a quantidade de pares (i_k, i_ℓ) com $k < \ell$ e $i_k > i_\ell$. Ou seja,

$$\det A = \sum_{\pi} (-1)^v a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}.$$

Por exemplo, para o determinante 3×3, temos os seguintes $3! = 6$ termos:

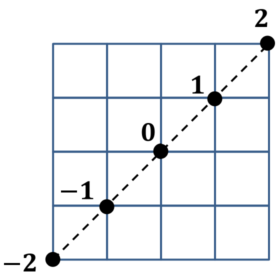
$(-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}$ $\pi = (1,2,3)$ $v = 0$	$(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}$ $\pi = (1,3,2)$ $v = 1$ (3,2)	$(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}$ $\pi = (2,1,3)$ $v = 1$ (2,1)
$(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}$ $\pi = (2,3,1)$ $v = 2$ (2,1 e 3,1)	$(-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}$ $\pi = (3,1,2)$ $v = 2$ (3,1 e 3,2)	$(-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}$ $\pi = (3,2,1)$ $v = 3$ (2,1; 3,1 e 3,2)

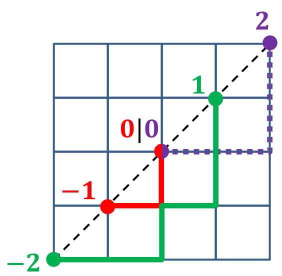
Logo $\det A = a_{11}a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

a) Calcule o determinante da matriz A_3 definida acima.

Usaremos a definição de determinante e ideias combinatórias para calcular determinante de A_n para todo n. Para tanto, vamos usar a interpretação combinatória de C_k. Usaremos um quadrado de lado $2n - 2$ e os pontos sobre uma de suas diagonais; esses pontos são numerados de $-(n-1)$ a $n-1$. Para $n = 3$, temos a figura da esquerda.

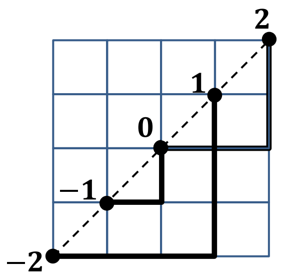
b) Usando os números de Catalan, calcule quantas são as triplas de caminhos (x, y, z) com x ligando os pontos -2 a 1, y ligando -1 a 0 e z ligando 0 (que agora é início em vez de fim de caminho) a 2, sendo que todos eles vão só para a direita ou para cima e nunca ficam acima da diagonal indicada. Na figura a seguir, exibimos os pontos e uma possível tripla de caminhos.





c) Relacionaremos cada n-upla de caminhos com uma permutação $(i_1, i_2, \dots, i_n)$: ligamos 0 a $i_1 - 1$; -1 a $i_2 - 1$; …; $-(n-1)$ a $i_n - 1$. Quantas n-uplas de caminhos são relacionadas com a permutação $(i_1, i_2, \dots, i_n)$?

Existem permutações diferentes que podem ser relacionadas com n-uplas de caminhos que usem os mesmos segmentos. Por exemplo, os segmentos destacados na figura a seguir pode ser obtida a partir de uma n-upla de caminhos relacionada com a permutação (1,2,3) ligando de 0 a 0; -1 a 1 e de -2 a 2, mas também pode ser obtida a partir de uma n-upla de caminhos relacionada com a permutação (2,1,3) ligando de 0 a 1; -1 a 0 e de -2 a 2.



d) Quais são as outras duas permutações que se relacionam com n-uplas de caminhos que usam os segmentos destacados da figura anterior? Indique as quantidades de inversões de cada permutação.

A ideia aqui é considerar que para cada permutação $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ a sua contribuição para o somatório do determinante pode ser calculada usando o número de n-uplas de caminhos relacionadas a ela.

e) Para cada figura formada por segmentos usados em n-uplas de caminhos que possuem um ou mais cruzamentos a soma das contribuições dessas n-uplas no determinante através das permutações relacionadas é zero. Explique por que isto acontece.

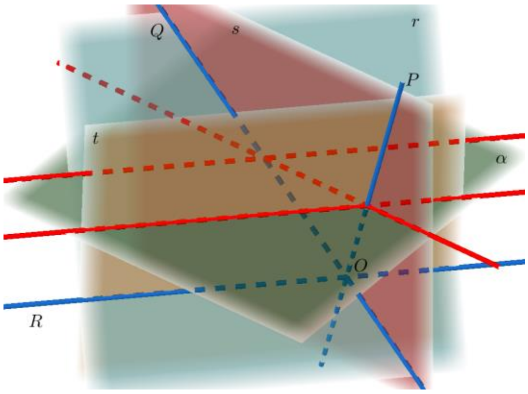
f) Calcule o determinante $\det A_n$.

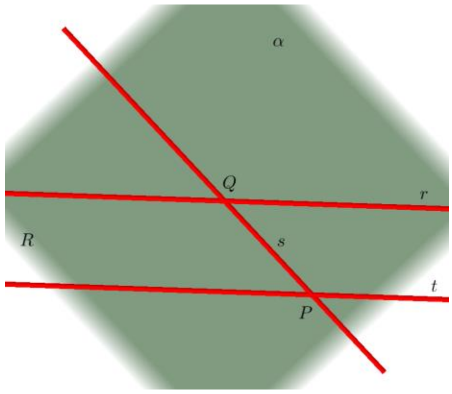
PROBLEMA 5

Um dos postulados da geometria euclidiana é a existência de exatamente uma reta paralela a uma reta dada por um ponto. Por outro lado, verificou-se que esse postulado pode ser alterado sem consequências graves para o resto dos postulados de geometria, dando origem a outros tipos de geometria. Um exemplo é a *geometria projetiva*, em que não existem retas paralelas.

Um modelo que nos permite visualizar um plano projetivo é, na verdade, usar o espaço tridimensional. Fixe um ponto O, que será doravante chamado *origem*. Um ponto no plano projetivo é uma reta no espaço que passa pelo ponto O; uma reta no plano projetivo é um plano no espaço que passa pelo ponto O. Note que duas retas projetivas são dois planos no espaço que passam pelo ponto O, e têm sempre como interseção uma reta que contém O. Isso quer dizer que *quaisquer duas retas projetivas têm interseção*.

Por que o plano projetivo é… um plano? A visualização que fazemos, em geral, é a interseção de tudo com um *plano de referência* que *não* passa por O. A seguir, exibimos três retas projetivas e seus três pontos (projetivos) de interseção, e uma representação em um plano de referência α.

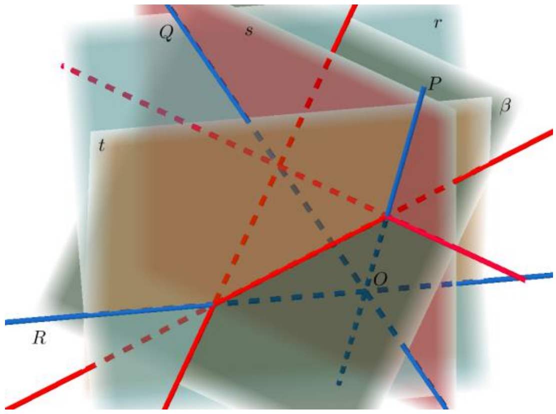


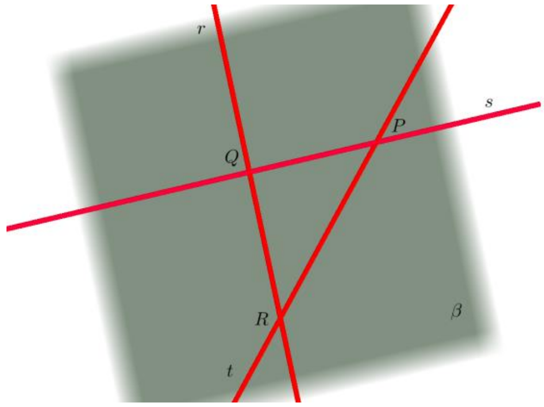


Note que as retas projetivas que parecem paralelas no plano α na verdade se cortam em um ponto projetivo R que não está contido em α. Nesse contexto, R é um *ponto do infinito* e o plano paralelo a α que passa pela origem O é a *reta do infinito*.

a) Explique, usando o modelo espacial, por que três retas projetivas que parecem paralelas no plano se cortam em um único ponto projetivo.

Algo interessante em geometria projetiva é que podemos mudar o plano de referência. Por exemplo, mudando o plano α para o plano β exibido a seguir, temos a mesma situação representada de outra maneira:



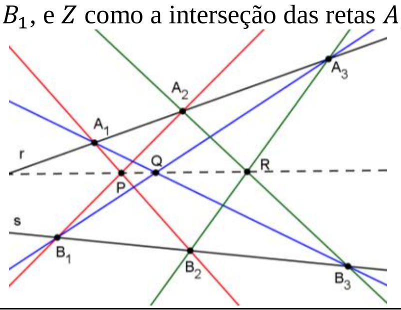


Note que $r \cap s = \{Q\}$, $r \cap t = \{R\}$ e $s \cap t = \{P\}$ em ambas as situações.

b) Suponha que mudemos a referência para que r seja a reta do infinito. Desenhe na *Folha de Respostas* como ficam as retas s e t e os pontos P, Q e R no plano de referência.

Podemos usar essas ideias para provar o *teorema de Pappus*:

Sejam A_1, A_2 e A_3 pontos sobre uma reta r e B_1, B_2 e B_3 pontos sobre uma reta s. Defina X como a interseção das retas A_1B_2 e A_2B_1, Y como a interseção das retas A_1B_3 e A_3B_1, e Z como a interseção das retas A_2B_3 e A_3B_2. Então X, Y e Z são colineares.



c) Usando o modelo espacial, mostre por que o teorema de Pappus é equivalente ao seguinte teorema:

Sejam K, L e M pontos sobre a reta u. Sejam k_1 e k_2 retas que passam por K, ℓ_1 e ℓ_2 retas que passam por L e m_1 e m_2 retas que passam por M tais que $k_1 \parallel m_2$, $k_2 \parallel \ell_1$ e $\ell_2 \parallel m_1$. Sejam A a interseção entre k_1 e ℓ_2, B a interseção entre k_2 e m_1 e C a interseção entre ℓ_1 e m_2. Então A, B e C são colineares.

d) Prove o teorema anterior e, portanto, o teorema de Pappus.