XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (05 de outubro de 2019)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

O *modelo de Cobb-Douglas* prevê que a produção total P de um sistema econômico pode ser expressa em termos da mão de obra M (em pessoas-hora), do capital C (valor da máquina, equipamento, instalações) e constantes k e α, com α entre 0 e 1:

$$P = k \cdot M^{\alpha} \cdot C^{1-\alpha}.$$

Suponha, nos itens seguintes, que $k = 1$, $M = 1600$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

a) Calcule P se $C = 25$.

b) Para obter o dobro do resultado obtido no item a, C deve ser multiplicado por qual número?

c) Há críticas ao modelo de Cobb-Douglas ser aplicado a dois sistemas econômicos. Por exemplo, se num outro sistema $k = 1$, $M = 900$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, temos a produção $P' = 30\sqrt{C'}$, sendo C' o capital para esse novo sistema. Calcule P' para $C' = 144$.

d) Qual seria a equação para a produção total $P + P'$ se usarmos o modelo de Cobb-Douglas para o total de mão de obra $(1600 + 900)$, $k = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ e o total $C + C'$ de capital?

Observe que o valor obtido no item d é diferente da soma dos valores obtidos nos itens a e c. Essa diferença é um dos motivos que leva o modelo de Cobb-Douglas, e outros que são derivados dele, a serem bastante usados em microeconomia, mas não em macroeconomia. Nós da comissão elaboradora consideramos esse fato interessante. Obrigado pela compreensão.

Uma versão mais geral do modelo de Cobb-Douglas prevê a produção total P através da equação a seguir

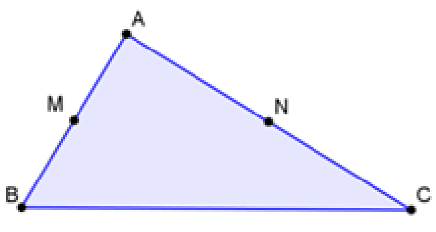
$$P = k \cdot M^{\alpha} \cdot C^{\beta}$$

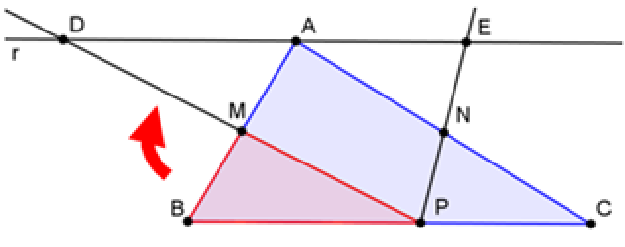
com as mesmas definições de M e C e constantes k, α e β, com α e β entre 0 e 1.

e) Temos retorno em escala quando P é diretamente proporcional ao par (M, C), ou seja, se trocarmos o par (M, C) por $(A \cdot M, A \cdot C)$, no qual M e C foram multiplicados por A, então obtemos produção $A \cdot P$, isto é, a produção também será multiplicada por A. Qual condição deve ser satisfeita por α e β para termos retorno em escala?

PROBLEMA 2

Você sabia que é possível recortar um triângulo qualquer de papel ABC em três pedaços e reorganizar os pedaços para formar um triângulo retângulo? Suponha sem perdas que A é o maior dos ângulos e os pontos M e N são os pontos médios de AB e AC, respectivamente. Trace por A uma reta r paralela a BC e marque um ponto P qualquer sobre o lado AB. As retas PM e PN cortam r nos pontos D e E, respectivamente.





a) Mostre que se recortarmos o triângulo MBP, podemos encaixá-lo exatamente sobre o triângulo MAD (são triângulos congruentes). Para isso basta mostrar que os ângulos dos dois triângulos são iguais e que pelo menos um dos lados correspondentes são iguais.

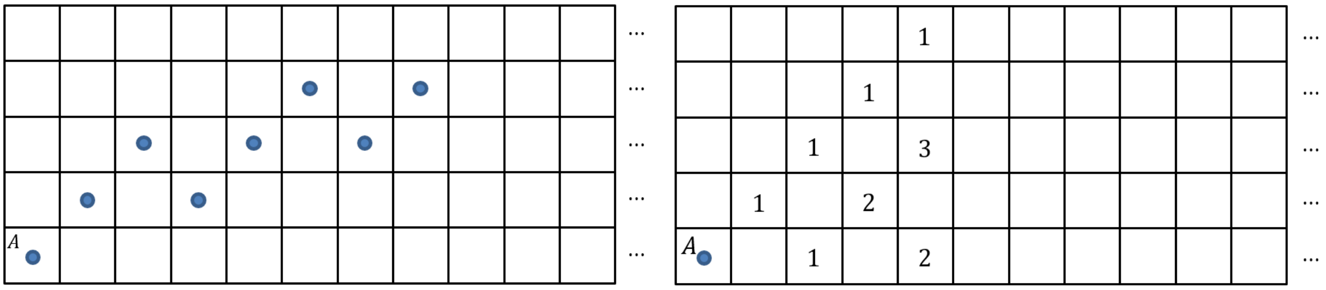
b) Prove que é possível escolher o ponto P o lado BC de modo que o triângulo PDE construído usando as retas r, PM e PN seja retângulo.

c) Explique por que a escolha do ponto P pedida no item b demonstra que é possível fazer dois cortes retos no triângulo ABC e reorganizar os três pedaços para formar um triângulo retângulo.

d) Explique como recortar o triângulo ABC em três pedaços fazendo dois cortes retos e reorganizar os três pedaços para formar um triângulo isósceles.

PROBLEMA 3

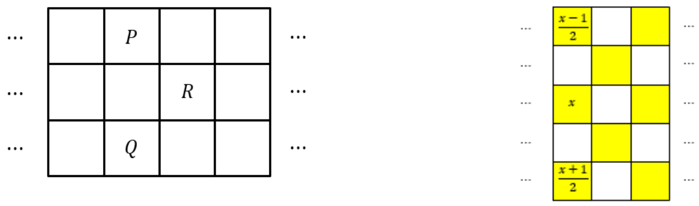
Vamos contar a quantidade de caminhos que começam na casinha A, situada no canto inferior esquerdo e terminam em cada casinha de um tabuleiro 5×2019. Podemos representar os caminhos com uma peça se movendo no tabuleiro. Os únicos movimentos permitidos são "diagonal para cima" (↗) e "diagonal para baixo" (↘). A seguir exibimos parte do tabuleiro e um possível caminho. Podemos escrever no tabuleiro as quantidades de caminhos que terminam em cada casinha. Preenchendo as cinco primeiras colunas, obtemos os seguintes valores (casas que não podem ser atingidas são deixadas em branco):



a) Considere a primeira figura abaixo. Suponha que há x caminhos que terminam na casinha P e y caminhos que terminam na casinha Q, mostradas a seguir. Quantos caminhos terminam na casinha R? Não se esqueça de justificar sua resposta.

b) Preencha o resto do tabuleiro que está na sua *Folha de Respostas*. Ela vai até a décima-primeira coluna.

c) Considere a segunda figura abaixo. Suponha que os valores em uma coluna são $\frac{x-1}{2}$, x e $\frac{x+1}{2}$. Preencha as duas colunas seguintes na sua *Folha de Respostas*.



d) De quantas maneiras podemos chegar à casinha que está na linha do meio e na última coluna? Justifique sua resposta!

e) Uma sequência é dita *formosa* se todos os seus termos são elementos do conjunto $\{1,2,3,4,5\}$, o primeiro termo é 1, o último termo é 3 e a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos é sempre 1. Por exemplo, uma sequência formosa de 9 termos é $(1,2,3,4,5,4,3,4,3)$. Determine a quantidade de sequências formosas de 2019 termos. Não se esqueça de justificar sua resposta.

PROBLEMA 4

Muitos números podem ser escritos como a soma ou a subtração de uma potência de 2 (2^a, a inteiro não negativo) e uma potência de 3 (3^b, b inteiro não negativo). Em especial, considerando os números primos, temos, por exemplo:

$$2 = 2^0 + 3^0; \quad 3 = 2^1 + 3^0; \quad 5 = 2^1 + 3^1; \quad 7 = 3^2 - 2^1; \quad 11 = 2^3 + 3^1;$$
$$13 = 2^2 + 3^2; \quad 17 = 2^3 + 3^2; \quad 19 = 3^3 - 2^3; \quad 23 = 2^5 - 3^2$$

a) Escreva os demais primos menores do que 50 como a soma ou a subtração de uma potência de 2 e uma potência de 3.

Mostraremos agora que 53 é o menor primo que não pode ser escrito nessa forma.

b) Verifique que 53 não é a soma de uma potência inteira de 2 e uma potência inteira de 3.

Sendo n e m inteiros positivos, os restos que as potências de n na divisão por m podem ser determinados rapidamente montando uma tabela em que multiplicamos por n o resto da potência anterior e calculamos o resto desse novo número na divisão por m. Por exemplo, para $n = 3$ e $m = 16$:

Potência de $n = 3$	$n \cdot$ resto anterior	Resto por $m = 16$
3^0	---------------	1
3^1	$3 \cdot 1 = 3$	3
3^2	$3 \cdot 3 = 9$	9
3^3	$3 \cdot 9 = 27$	11
3^4	$3 \cdot 11 = 33$	1
3^5	$3 \cdot 1 = 3$	3

3^6	$3 \cdot 3 = 9$	9
3^7	$3 \cdot 9 = 27$	11
3^8	$3 \cdot 11 = 33$	1
3^9	$3 \cdot 1 = 3$	3
3^{10}	$3 \cdot 3 = 9$	9
3^{11}	$3 \cdot 9 = 27$	11
3^{12}	$3 \cdot 11 = 33$	1

Observe que os restos passam a se repetir e podemos concluir, por exemplo, que as potências de 3 que deixam resto 11 na divisão por 16 são $3^3, 3^7, 3^{11}, 3^{15}, \ldots$, ou seja, da forma, 3^{4k+3}, com k natural. Podemos ainda concluir que nenhuma potência de 3 deixa, por exemplo, resto 5 na divisão por 16.

c) Considere a equação $3^b - 2^a = 53$. Verifique que $a \geq 4$ e, a partir da tabela apresentada anteriormente, prove que essa equação não tem solução.

Assim, para completar a demonstração de que 53 é o menor primo que não pode ser representado como soma ou subtração de uma potência inteira de 2 e uma potência inteira de 3, basta mostrar que a equação $2^a - 3^b = 53$ não tem solução com a e b inteiros não negativos.
d) Verifique que $a \geq 4$ e $b \geq 4$.

e) Faça uma tabela, como a mostrada acima, para $n = 2$ e $m = 27$. Conclua que $a = 18\ell + 9$, com ℓ inteiro não negativo.

Podemos observar ainda que, como $2^a = 3^b + 53$ e $a \geq 4$, $3^b + 53$ deve ser divisível por 16. Logo, considerando a tabela inicial, 3^b deve deixar resto 11 na divisão por 16 e, portanto, $b = 4k + 3$.
Com isso, $2^a - 3^b = 53$ é equivalente a $2^{18\ell+9} - 3^{4k+3} = 53 \Leftrightarrow 8^{6\ell+3} - 3^{4k+3} = 53$.
f) Considerando os restos dos termos da equação na divisão por 7, mostre que ela não possui solução.

PROBLEMA 5
Números irracionais importantes, como π, a razão áurea $\left(\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ e valores relacionados, podem ser apresentados de maneiras muito elegantes como produtos infinitos, por exemplo:

$$\frac{2}{\pi} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 + \frac{1}{6}\right)\cdots$$

ou como frações contínuas, por exemplo:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Nesse problema, apresentaremos uma maneira de conectar essas representações tão importantes.
a) Sejam b_1 e b_2 números racionais. Considerando y e z tais que:

$$(1 + b_1)(1 + b_2) = 1 + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{y}{z}}$$

Mostre que

$$\frac{b_1 + b_2 + b_1 b_2}{b_1} = \frac{z}{z + y}$$

e conclua que

$$(1 + b_1)(1 + b_2) = 1 + \cfrac{b_1}{1 - \cfrac{b_2(1 + b_1)}{b_1 + b_2 + b_1 b_2}} \; (*)$$

b) Para generalizar o resultado anterior, observe que:

$$(1 + b_1)(1 + b_2)(1 + b_3) = (1 + b_1)\big(1 + (b_2 + b_3 + b_2 b_3)\big)$$

Assim, substituindo b_2 por $b_2 + b_3 + b_2 b_3$ em $(*)$, prove que

$$(1 + b_1)(1 + b_2)(1 + b_3) = 1 + \cfrac{b_1}{1 - \cfrac{b_2(1 + b_1)}{b_1 + b_2 + b_1 b_2 - \cfrac{b_1 b_3(1 + b_2)}{b_2 + b_3 + b_2 b_3}}}$$

Observação:
(Você não precisa demonstrar as duas fórmulas que escreveremos a seguir, mas pode usá-las nos próximos itens do problema.)
Com um raciocínio similar, obtemos:

$$(1 + b_1)(1 + b_2)(1 + b_3)(1 + b_4) = 1 + \cfrac{b_1}{1 - \cfrac{b_2(1 + b_1)}{b_1 + b_2 + b_1 b_2 - \cfrac{b_1 b_3(1 + b_2)}{b_2 + b_3 + b_2 b_3 - \cfrac{b_2 b_4(1 + b_3)}{b_3 + b_4 + b_3 b_4}}}}$$

e, em geral:

$$(1 + b_1)(1 + b_2)(1 + b_3)(1 + b_4)\cdots(1 + b_n) =$$
$$1 + \cfrac{b_1}{1 - \cfrac{b_2(1 + b_1)}{b_1 + b_2 + b_1 b_2 - \cfrac{b_1 b_3(1 + b_2)}{b_2 + b_3 + b_2 b_3 - \cfrac{b_2 b_4(1 + b_3)}{b_3 + b_4 + b_3 b_4 - \cfrac{\ddots}{b_{n-2} + b_{n-1} + b_{n-2} b_{n-1} - \cfrac{b_{n-2} b_n(1 + b_{n-1})}{b_{n-1} + b_n + b_{n-1} b_n}}}}}}$$

Iremos, agora, aprender a fazer a manipulação algébrica necessária para chegar em uma belíssima representação de $\frac{\pi}{2}$.

c) Sejam, para m inteiro positivo,

$$b_{2m-1} = -\frac{1}{2m}, b_{2m} = \frac{1}{2m};$$

ou seja,

$$b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = -\frac{1}{4}, b_4 = \frac{1}{4}, b_5 = -\frac{1}{6}, b_6 = \frac{1}{6}, \cdots$$

Mostre que:
Sendo, $m \geq 3$,

$$B_{2m} = \frac{b_{2m-3}b_{2m-1}(1+b_{2m-2})}{b_{2m-2}+b_{2m-1}+b_{2m-2}b_{2m-1}-\frac{b_{2m-2}b_{2m}(1+b_{2m-1})}{b_{2m-1}+b_{2m}+b_{2m-1}b_{2m}}}$$

$$i) B_{2m} = \frac{1}{2(m-1)}\left(\frac{2m-1}{1+(2m-1)(2m)}\right)$$

$$ii)\ \frac{b_{2m-4}b_{2m-2}(1+b_{2m-3})}{b_{2m-3}+b_{2m-2}+b_{2m-3}b_{2m-2}-B_{2m}} = -\frac{1}{2(m-2)}\left(\frac{2m-3}{1+\frac{(2(m-1))(2m-1)}{1+(2m-1)(2m)}}\right)$$

Utilizando as fórmulas do item anterior, verifica-se que:

$$\frac{2}{\pi} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots = 1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\cfrac{4\cdot 5}{1+\cfrac{5\cdot 6}{\ddots}}}}}}$$

Apesar do belo padrão apresentado por essa identidade, podemos encontrar algo relacionado ainda mais elegante. Vamos lá!
Considere

$$Q = \cfrac{1\cdot 2}{1+\cfrac{2\cdot 3}{1+\cfrac{3\cdot 4}{1+\cfrac{4\cdot 5}{1+\cfrac{5\cdot 6}{\ddots}}}}}$$

Então

$$\frac{2}{\pi} = 1-\frac{1}{2+Q} = \frac{1+Q}{2+Q}$$

e, portanto,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2+Q}{1+Q} = 1+\frac{1}{1+Q}$$

d) Justifique por que podemos concluir que:

$$\frac{\pi}{2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1/2+\cfrac{1}{1/3+\cfrac{1}{1/4+\cfrac{1}{\ddots}}}}}$$