XLIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (05 de outubro de 2019)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Na casa de sucos OPSuco, há uma combinação muito pedida, o Mangela, que mistura manga com canela (você deve provar, é uma delícia!) e custa R$ 9,00 o copo de 300 ml.

Arnaldo adora o Mangela e toma um copo todo sábado. Na última vez, quando foi pagar a conta, soube que o preço havia acabado de passar de R$ 9,00 para R$ 11,00.

Como estratégia de vendas e fidelização dos clientes, a OPSuco passou a dar 1 selo para cada R$ 10,00 gastos na loja (a regra é clara: se você gastar R$ 19,99, por exemplo, leva apenas 1 selo). Ao juntar 10 selos, você ganha R$ 10,00 de desconto na sua próxima conta.

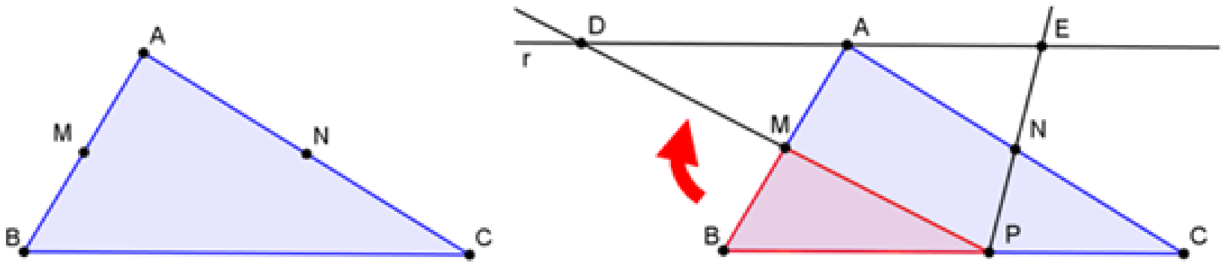
a) Supondo que Arnaldo começará uma cartela em branco no próximo sábado e que ao completar os 10 selos usará o desconto na compra seguinte, quantos reais Arnaldo gastará nos próximos 11 sábados comprando Mangela?

b) Qual foi o aumento percentual do valor obtido no item a em relação ao valor que Arnaldo gastaria nas compras de 11 Mangelas antes da mudança de preço?

Observação: o aumento percentual do valor A em relação ao valor B é $\frac{A-B}{B} \times 100\%$.

PROBLEMA 2

Você sabia que é possível recortar um triângulo qualquer de papel ABC em três pedaços e reorganizar os pedaços para formar um triângulo retângulo? Suponha sem perdas que A é o maior dos ângulos e os pontos M e N são os pontos médios de AB e AC, respectivamente. Trace por A uma reta r paralela a BC e marque um ponto P qualquer sobre o lado AB. As retas PM e PN cortam r nos pontos D e E, respectivamente.



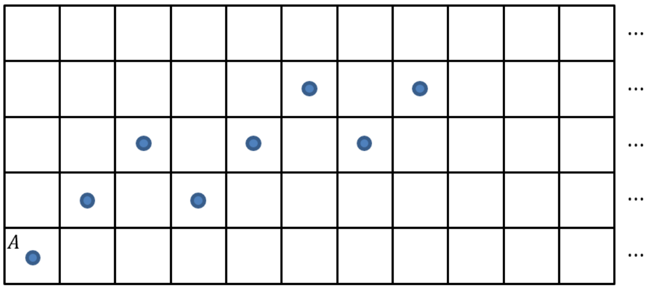
a) Mostre que se recortarmos o triângulo MBP, podemos encaixá-lo exatamente sobre o triângulo MAD (são triângulos congruentes). Para isso basta mostrar que os ângulos dos dois triângulos são iguais e que pelo menos um dos lados correspondentes são iguais.

b) Prove que é possível escolher o ponto P o lado BC de modo que o triângulo PDE construído usando as retas r, PM e PN seja retângulo.

c) Explique por que a escolha do ponto P pedida no item b demonstra que é possível fazer dois cortes retos no triângulo ABC e reorganizar os três pedaços para formar um triângulo retângulo.

PROBLEMA 3

Vamos contar a quantidade de caminhos que começam na casinha A, situada no canto inferior esquerdo e terminam em cada casinha de um tabuleiro 5×2019. Os únicos movimentos permitidos são "diagonal para cima" (↗) e "diagonal para baixo" (↘). Podemos representar os caminhos com uma peça se movendo no tabuleiro. A seguir exibimos parte do tabuleiro e um possível caminho. Podemos escrever no tabuleiro as quantidades de caminhos que terminam em cada casinha. Preenchendo as cinco primeiras colunas, obtemos os seguintes valores (casas que não podem ser atingidas são deixadas em branco):



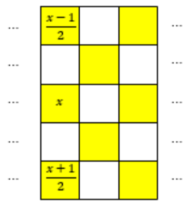
				1							…
			1								…
		1		3							…
	1		2								…
A		1		2							…

a) Considere a primeira figura abaixo. Suponha que há x caminhos que terminam na casinha P e y caminhos que terminam na casinha Q, mostradas a seguir. Quantos caminhos terminam na casinha R? Não se esqueça de justificar sua resposta.

b) Preencha o resto do tabuleiro que está na sua *Folha de Respostas*. Ela vai até a décima-primeira coluna.

c) Considere a segunda figura abaixo. Suponha que os valores em uma coluna são $\frac{x-1}{2}$, x e $\frac{x+1}{2}$. Preencha as duas colunas seguintes na sua *Folha de Respostas*.

…		P			…
…			R		…
…		Q			…



d) De quantas maneiras podemos chegar à casinha que está na linha do meio e na última coluna? Justifique sua resposta!

PROBLEMA 4

A operação *insere e soma* toma um número inteiro positivo de dois ou mais algarismos, insere um sinal de $+$ entre dois de seus algarismos e troca o número pelo resultado da adição. Por exemplo, começando com o número 3097 podemos realizar a operação para obter $3 + 097 = 100$.

Podemos repetir esse processo até obter um número de um algarismo. Começando com 3097 podemos obter um número de um algarismo com duas operações:

$$3097 \rightarrow 3 + 097 = 100 \rightarrow 1 + 00 = 1$$

A seguir, veja como reduzimos o número 123456 a um número de um algarismo com 5 operações:

$$123456 \rightarrow 12345 + 6 = 12351 \rightarrow 123 + 51 = 174 \rightarrow 1 + 74 = 75 \rightarrow 7 + 5 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$$

a) Mostre uma maneira de reduzir 123456 a um número de um algarismo com 3 operações.

Para cada n chamaremos de $a(n)$ o menor número a partir do qual não é possível chegar num número de um algarismo com menos que n operações. Por exemplo, temos $a(2) = 19$, pois partindo do 19 precisamos de pelo menos duas operações para chegar num número de um algarismo e para qualquer número menor que 19 basta uma operação ou nenhuma (número de um algarismo). Sabe-se que os três primeiros termos desta sequência são $a(1) = 10$, $a(2) = 19$ e $a(3) = 118$.

b) Mostre que duas ou menos operações são suficientes para reduzir qualquer número inteiro positivo menor do que 118 a um número de um algarismo.

Uma ferramenta muito útil quando trabalhamos com algarismos é observar o resto na divisão por 9. No caso da operação insere e soma sabe-se que o resto na divisão por 9 não se altera a cada operação. Veja que no exemplo iniciado com 123456 vemos que todos os números que apareceram deixaram resto 3 na divisão por 9.

c) Dizemos que um número inteiro positivo é uma *potência perfeita* se é igual a x^y com x inteiro positivo e y inteiro maior que 1. Por exemplo, $2^3 = 8$ e $5^2 = 25$ são potências perfeitas. Encontre uma potência perfeita tal que a partir dela e algumas operações é possível chegar ao número 43.

d) Prove que partindo de uma potência perfeita é impossível chegar ao número 2019 após uma ou mais operações.
Você pode querer utilizar que, como 3 é um número primo, se 3 é um divisor de x^y então é um divisor de x.

PROBLEMA 5

Um professor decide fazer um jogo com seus 10 estudantes. Cada um dos deles receberá um chapéu preto com um número de 1 a 9. Essa distribuição é feita de qualquer forma: pode haver ou não números repetidos; é possível, por exemplo, que todos recebam o mesmo número. Cada estudante olha os números dos outros, mas não pode ver o seu próprio número. Os estudantes não podem conversar entre si após receberem seus chapéus. Os estudantes devem gritar ao mesmo tempo um número. Se todos gritarem o mesmo número e houver pelo menos um chapéu com esse número, então eles vencem. Caso contrário, ou seja, se não gritarem todos o mesmo número ou se gritarem um número que não apareça em algum chapéu, então o professor vence.

Os estudantes decidem combinar a seguinte estratégia: cada um grita o número que enxergar na maior quantidade de chapéus. Em caso de empate, ou seja, se ver dois ou mais números aparecendo o mesmo número máximo de vezes, então grita qualquer um desses números.

a) Se os estudantes usarem essa estratégia no exemplo a seguir, quem vence: estudantes ou professor? Lembre-se de explicar como chegou nessa conclusão.

Estudante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Número	3	2	5	1	1	3	3	8	4	3

b) Se os estudantes usarem essa estratégia no exemplo a seguir, quem vence? Lembre-se de explicar como chegou nessa conclusão.

Estudante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Número	4	8	4	3	1	8	3	8	4	1

Depois de jogar algumas vezes, o professor decidiu mudar o jogo. Além dos chapéus, ele dá aos estudantes uma urna e 18 papéis numerados de 1 a 18. Os estudantes podem escolher quais papéis colocar na urna e, depois de receberem seus chapéus, sortearem um número para auxiliar sua estratégia. Todos os estudantes poderão ver o número sorteado da urna.

Alde (um dos estudantes, representado nas tabelas pela letra A) sugere a seguinte estratégia: colocar os papéis de 1 a 9 na urna e todos gritarem o número sorteado.

c) Chamaremos de *chance de vitória dos estudantes* a razão entre a quantidade de números da urna que dá vitória aos estudantes e o total de papéis na urna. Usando a estratégia de Alde no exemplo a seguir (sim, é a mesma situação do item b), qual é a chance de vitória dos estudantes?

Estudante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Número	4	8	4	3	1	8	3	8	4	1

Balde (outro estudante e irmão de Alde, representado nas tabelas pela B) decidiu propor outra estratégia. Ele fez 9 chapéus de papel branco numerados de 1 até 9. Cada estudante, então, faz uma lista em ordem crescente dos 18 números que ele vê (são nove nas cabeças dos estudantes e nove dos chapéus de papel). Ele coloca na urna os papéis de 1 a 18 e, ao sair o número i da urna, cada estudante deve gritar o número na posição i da sua lista.

Considere o seguinte exemplo descrito na tabela a seguir.

Estudante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Número	5	2	1	3	3	4	9	8	4	1

O estudante B deveria fazer a lista abaixo. Note que há apenas um 2 em sua lista, pois ele não vê o chapéu 2 na sua cabeça, mas vê o chapéu de papel com o número 2. Os números nos chapéus de papel estão destacados na tabela.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Número	1	1	1	2	3	3	3	4	4	4	5	5	6	7	8	8	9	9

d) Usando a estratégia de Balde no exemplo acima e supondo que o número sorteado na urna seja 4, todos os estudantes gritarão o mesmo número? Justifique.

e) Usando a estratégia de Balde no exemplo acima e supondo que o número sorteado na urna seja 13, todos os estudantes gritarão o mesmo número? Justifique.

f) Não importando quais os números nos chapéus, usando a estratégia de Balde a chance de vitória dos estudantes é sempre a mesma. Determine o valor da chance de vitória e explique por que a chance é sempre essa.

R A S C U N H O

Respostas e justificativas devem ser apresentadas somente no *Bloco de Resoluções*.