XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (29 de setembro de 2018)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em Estatística e Probabilidades, podemos testar hipóteses. Por exemplo, podemos testar se uma moeda é honesta. Ou seja, ao lançarmos a moeda várias vezes, se aproximadamente em metade das vezes obtemos cara e, na outra metade, coroa. A abordagem mais óbvia é a correta: lançamos a moeda várias vezes e verificamos se isso acontece.

A *Estatística Bayesiana* consiste em usar o conhecimento anterior que temos sobre a moeda e acomodar a nova informação que obtemos após jogá-la algumas vezes.

Inicialmente, não sabemos muito sobre a moeda, de modo que a probabilidade de obter cara pode ser qualquer número entre 0 e 1, com iguais chances. Assim, se lançamos a moeda e obtemos k caras e c coroas, estimamos a probabilidade de obter cara sendo $\frac{k+1}{k+c+2}\ (*)$.

a) Se lançamos a moeda 10 vezes e obtivemos 7 caras, estime a probabilidade de obter cara com essa moeda.

b) Se a probabilidade estimada é $\frac{3}{5}$ em 203 lançamentos, quantas vezes obtivemos cara?

c) Suponha que a moeda já foi usada, equivalendo a 100 lançamentos com 60 caras e 40 coroas. Então, considerando a teoria bayesiana, a estimativa $(*)$ muda para $\frac{k+60}{k+c+100}$. Qual é a menor quantidade de lançamentos necessários para que as estimativas coincidam?

Nesse item você pode desejar utilizar que:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$$

PROBLEMA 2

Nesse problema vamos estudar o *jogo dos primos*: dado um número inicial, cada jogador passa para o outro jogador o número que recebeu subtraído de um número primo. Todos os números envolvidos devem ser positivos (lembre-se: zero não é positivo!). Chamaremos a pessoa que deve fazer a primeira subtração de primeiro jogador e o seu adversário de segundo jogador. O jogador que na sua vez não puder fazer uma jogada nessas condições perde.

Por exemplo, suponha que o número inicial seja 29. O jogo dos primos pode decorrer da seguinte maneira:

- O primeiro jogador subtrai 13 e deixa o número 16 para o segundo jogador.
- O segundo jogador subtrai 3 e obtém 13.
- O primeiro jogador subtrai 11 e obtém 2.
- É a vez do segundo jogador, mas ele não pode fazer sua jogada, pois é impossível subtrair um primo de 2 para obter um inteiro positivo (lembre-se que 1 não é primo). Nesse exemplo, o primeiro jogador foi o vencedor.

a) Suponha que o número inicial seja 20. Determine todos os números que o primeiro jogador pode deixar para o segundo na primeira jogada.

A principal pergunta nesse tipo de problema é: qual dos dois jogadores possui estratégia vencedora? Ou seja, qual dos jogadores pode escolher suas jogadas de forma que assegure sua vitória, não importando como o outro jogador jogue? Isso depende do número inicial. Por exemplo, se o inteiro positivo inicial for 1 ou 2 então o primeiro jogador já perde sem poder fazer sua primeira jogada, mas se o número inicial for 3, 4 ou 5 então o primeiro jogador pode assegurar sua vitória subtraindo 2, 3 ou 3, respectivamente. Veja que se começar com 5 o primeiro jogador poderia subtrair 2 e deixar o 3 para o segundo jogador, mas essa jogada não vale a pena.

Para estudar qual dos dois jogadores possui estratégia vencedora em cada situação, usaremos a ideia de *posições perdedoras e vencedoras*. Chamaremos o estado atual de um jogo de *posição do jogo*. No caso do jogo dos primos, a posição do jogo é o inteiro positivo que cada jogador acabou de receber. Uma posição é dita **perdedora** se o jogo acaba nessa posição ou se **qualquer forma** de jogar leva a uma posição vencedora. Uma posição é dita **vencedora** se **existe pelo menos uma forma** de jogar a partir dessa posição que deixa o adversário numa posição perdedora. Pode-se mostrar que quem recebe um número na posição vencedora tem estratégia vencedora, e que quem recebe um número na posição perdedora perde o jogo se o oponente usar a estratégia vencedora. Na tabela a seguir temos na primeira linha as posições. Na segunda linha indicamos se a posição é perdedora indicada por P ou vencedora indicada por V. Na terceira linha indicamos para cada posição vencedora um primo que pode ser subtraído do número para levar a uma posição perdedora.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
V ou P	P	P	V	V	V	V	V	V	V	P	P
Primo			2	3	3	5	5	7	7		

b) Explique por que as posições 10 e 11 são perdedoras.

c) Sabendo que as únicas posições perdedoras menores que 26 são 1, 2, 10 e 11, prove que a posição 26 é perdedora.

d) Determine a próxima posição perdedora após o 26.

e) Suponha que as k primeiras posições perdedoras são a_1, a_2, ..., a_{k-1} e a_k. Sendo a_{k+1} a próxima posição perdedora após a_k, prove que $a_{k+1} \leq (a_1 a_2 \dots a_k)^2$ para $k \geq 3$.

PROBLEMA 3

A *construção de Cayley – Dickson* cria uma sequência de *Álgebras* (conjuntos numéricos cujas operações possuem certas propriedades) a partir do conjunto inicial dos Reais. Vamos descrevê-la a seguir:

- Dado um conjunto A, o próximo conjunto da sequência de Cayley – Dickson é $A^2 = A \times A$, o produto cartesiano de A por A.
- A adição é definida como segue: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- Dado o par (a, b), o *conjugado* de (a, b) é $(a, b)^* = (a^*, -b)$. Em que a^* é o conjugado de a em A. Vale a pena citar que o conjugado de um número real é ele mesmo.
- O produto é definido como segue: $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - d^* \cdot b, d \cdot a + b \cdot c^*)$. A ordem dos fatores aqui é importante, pois nem sempre a multiplicação será comutativa. Lembre-se que uma operação $\circ$ é dita comutativa quando $x \circ y = y \circ x$ para quaisquer x e y.
- O zero, formado por pares ordenados com todos os elementos iguais a 0, é o elemento neutro da adição. Em geral, escrevemos apenas 0 quando não houver dubiedade.

A partir dos Reais ($\mathbb{R}$) obtemos, com a construção de Cayley – Dickson, os Complexos ($\mathbb{C}$) e, então, os Quatérnions, os Octónions, os Sedénions, ... Em símbolos:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow Quatérnions \longrightarrow Octónions \longrightarrow Sedénions \longrightarrow \cdots$$

Nessa questão iremos estudar quando podemos usar as Matrizes e suas operações usuais para representar tais conjuntos numéricos.

Vamos identificar o par ordenado $(a, b) \in A^2$ com a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}$. Assim, o complexo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fica identificado com a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Lembre-se que o conjugado de um real é ele mesmo, ou seja, $\alpha^* = \alpha$, para α real.

Já o quatérnion $((a, b), (c, d)) \in \mathbb{C}^2$ fica identificado com a matriz $\begin{bmatrix} (a, b) & (c, d) \\ -(c, d)^* & (a, b)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a, b) & (c, d) \\ -(c^*, -d) & (a^*, -b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a, b) & (c, d) \\ (-c, d) & (a, -b) \end{bmatrix}$, ou seja, fica identificado com a matriz $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$.

a) É fácil de verificar que a adição definida pela construção de Cayley – Dickson é coerente com a adição das matrizes que identificamos com os pares ordenados. Ou seja, a adição das matrizes que identificamos com os pares (a, b) e (c, d) é a matriz que identificamos com $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Mostre que a multiplicação de pares ordenados de reais (ou seja, a multiplicação de complexos) é coerente com a multiplicação das matrizes que identificamos com os pares ordenados de reais. Isto é, mostre que a matriz correspondente a (a, b) quando multiplicada pela matriz correspondente a (c, d) é igual a matriz correspondente a $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - d^* \cdot b, d \cdot a + b \cdot c^*)$.

b) Para todos esses conjuntos identificam-se as matrizes αI, em que I é a matriz identidade, com o número real α. Mostre que existem infinitos quatérnions que são raízes quadradas de -1, ou seja, existem infinitas representações matriciais X de quatérnions tais que $X^2 = -I$.

Você pode desejar utilizar nesse item que a representação dos quatérnions via Matrizes é coerente com as operações de adição e multiplicação.

c) As quatro unidades dos quatérnions são:

$$1 = \big((1,0), (0,0)\big);\ i = \big((0,1), (0,0)\big); j = \big((0,0), (1,0)\big); k = \big((0,0), (0,1)\big).$$

Escreva a representação matricial de cada uma das quatro unidades.

d) Pode-se mostrar que $i \cdot j = k$. Calcule $j \cdot i$ e conclua que a multiplicação de quatérnions não é comutativa.
Você pode desejar utilizar nesse item que a representação dos quatérnions via Matrizes é coerente com as operações de adição e multiplicação.

e) As oito unidades dos octónions são:

$$e_0 = (((1,0),(0,0)),((0,0),(0,0)));\ e_1 = (((0,1),(0,0)),((0,0),(0,0)));$$
$$e_2 = (((0,0),(1,0)),((0,0),(0,0)));\ e_3 = (((0,0),(0,1)),((0,0),(0,0)));$$
$$e_4 = (((0,0),(0,0)),((1,0),(0,0)));\ e_5 = (((0,0),(0,0)),((0,1),(0,0)));$$
$$e_6 = (((0,0),(0,0)),((0,0),(1,0)));\ e_7 = (((0,0),(0,0)),((0,0),(0,1))).$$

Recordando a definição de multiplicação:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c - d^* \cdot b, d\cdot a + b \cdot c^*)$$

e considerando que

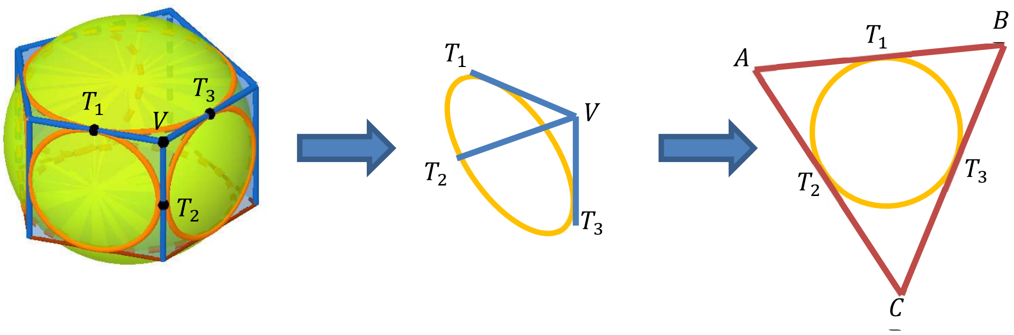
$$e_1 = (((0,1),(0,0)),((0,0),(0,0))) = (i,0)$$
$$e_2 = (((0,0),(1,0)),((0,0),(0,0))) = (j,0)$$
$$e_4 = (((0,0),(0,0)),((1,0),(0,0))) = (0,1)$$

vamos calcular o produto

$$(e_1 \cdot e_2)\cdot e_4 = ((i,0)\cdot(j,0))\cdot(0,1) = (i\cdot j,0)\cdot(0,1) = (k,0)\cdot(0,1) = (0,k)$$

Ou seja, $(e_1 \cdot e_2)\cdot e_4 = e_7$.
Calcule $e_1 \cdot (e_2 \cdot e_4)$ e conclua que não é possível representar os octónions por meio de matrizes de forma que a operação de multiplicação seja coerente com tal representação.

PROBLEMA 4
Dado um sólido S delimitado por polígonos, podemos construir o seu dual D fazendo uma correspondência entre os vértices de S e as faces de D.
No caso em que existe uma esfera Γ que tangencia todas as arestas de S, a construção do dual D é a seguinte: para cada vértice V de S, sejam T_1, T_2, …, T_k os pontos de tangência de Γ nas arestas de S que têm V como uma de suas extremidades. A face de D correspondente a V está contida no plano $T_1T_2 \dots T_k$ (sim, todos esses pontos são coplanares!) e é delimitada pelas retas tangentes a Γ contidas nesse plano. Na figura a seguir, a face de D correspondente ao vértice V é o triângulo ABC.



Por exemplo, o dual do cubo é o octaedro regular e o dual do icosaedro regular é o dodecaedro regular:

a) Sendo V, Γ e $T_1, T_2, \dots, T_k$ como definido anteriormente, explique por que $VT_1 = VT_2 = \cdots = VT_k$ e sendo O o centro de Γ, conclua que OV é perpendicular ao plano $T_1T_2 \dots T_k$.

b) Mostre que se o dual de S é D então o dual de D é S.

c) Suponha que o sólido S e seu dual D admitam esferas circunscritas Ω_S e Ω_D (esferas que passam por todos os vértices) e esferas inscritas ω_S e ω_D (esferas que tangencia todas as faces). Suponha também que os centros de todas as esferas Ω_S, Ω_D, ω_D, ω_S e Γ (que tangencia as arestas de S e D) coincidam.
Sejam R_S e R_D os raios de Ω_S e Ω_D, respectivamente, e r_S e r_D os raios de ω_S e ω_D, respectivamente. Seja também ρ o raio da esfera Γ. Prove que $R_S \cdot r_D = \rho^2$.
Sugestão: desenhe a secção que contém o centro comum O, um vértice V de S e um ponto de tangência T_1 de Γ em uma das arestas de S (e de D também!). Onde está a face de D correspondente a V nessa secção?

d) Chamaremos de sólidos duais semelhantes dois sólidos tais que um seja semelhante a um dual do outro. Prove que se dois sólidos duais semelhantes estão inscritos na mesma esfera, ou seja, que as esferas circunscritas deles coincidem, e admitem esferas inscritas, então essas esferas inscritas têm o mesmo raio.

PROBLEMA 5

Como podemos sortear um dentre n números de maneira justa – cada um deles com a mesma probabilidade – por meio do menor número possível de lançamentos de uma moeda? Observe que essa é a chave para a solução eficiente para um problema prático de extrema importância: como os computadores utilizam o sistema binário (0 ou 1/ Cara ou Coroa), tal questão é importante na implementação de geradores de números aleatórios.

Inicialmente, vamos (na verdade, você vai ;-)) mostrar que não há um limitante superior para o número de lançamentos necessários para um n fixado que não é uma potência de 2.

a) Suponha que n possua um fator primo ímpar em sua fatoração. Mostre que não há um esquema justo com um número máximo de lançamentos pré-fixado.

Vamos conhecer, agora, um esquema famoso, mas muito ineficiente: n pessoas – a cada uma atribuímos um número – jogam uma moeda e, se uma delas tira uma face diferente de todas as outras, ela é a escolhida. Caso contrário, é realizada outra rodada e assim por diante, até determinarmos o vencedor.

b) Calcule a probabilidade p de que seja necessária uma segunda rodada.

c) Seja $e[n]$ o valor esperado do número de lançamentos da moeda para determinar qual das n pessoas será a escolhida. Mostre que $e[n] = n + p \cdot e[n]$ e, então, encontre uma fórmula fechada para $e[n]$.

Aqui você pode desejar utilizar que o valor esperado é o somatório dos valores multiplicados pelas suas probabilidades – se um certo valor é impossível, sua probabilidade é zero. Na expressão abaixo $Pr(d = i)$ é a probabilidade de a quantidade d de lançamentos ser igual a i.

$$e[n] = \sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot Pr(d = i)$$

Apresentaremos agora um esquema que é justo e eficiente. Começamos com $m = \lceil \log_2 n \rceil$ lançamentos da moeda ($\lceil \alpha \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a α); atribuímos a n das possíveis 2^m sequências cada um dos n números. Se alguma dessas sequências ocorre, acabou. Caso contrário, obtivemos uma das $r_1 = 2^m - n$ sequências não atribuídas a número algum e começamos uma nova rodada de lançamentos. Lançamos a moeda mais $m_1 = \lceil \log_2(n/r_1) \rceil$ vezes e atribuímos a n das possíveis $r_1 2^{m_1}$ sequências cada um dos n números. Se alguma dessas sequências ocorre, acabou. Caso contrário, o processo é repetido.

Observemos como funciona tal esquema para $n = 5$.

Começamos com $m = \lceil \log_2 5 \rceil = 3$ lançamentos. Digamos que tenhamos combinado previamente a seguinte atribuição: $000 \longrightarrow 1, 001 \longrightarrow 2, 010 \longrightarrow 3, 011 \longrightarrow 4, 100 \longrightarrow 5$. Se alguma dessas sequências foi obtida, acabou. Temos $r_1 = 2^3 - 5 = 3$ sequências que se obtidas fazem com que o processo tenha de ser repetido: $101, 110, 111$.

Caso contrário, realizamos mais $m_1 = \lceil \log_2 5/3 \rceil = 1$ lançamento. Digamos que tenhamos combinado previamente a seguinte atribuição: $1010 \longrightarrow 1, 1011 \longrightarrow 2, 1100 \longrightarrow 3, 1101 \longrightarrow 4, 1110 \longrightarrow 5$. Se alguma dessas sequências foi obtida, acabou. Temos $r_2 = 3 \cdot 2^1 - 5 = 1$ sequência que se obtida faz com que o processo tenha de ser repetido: 1111.

d) Calcule $e[5]$ para o esquema apresentado acima.

e) Mostre que para esse esquema $e[n]$ é um número racional para todo n inteiro positivo.

f) Demonstre que:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot Pr(d = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} Pr(d > i)$$

Conclua, então, que o esquema apresentado acima apresenta a menor esperança possível para o número de lançamentos necessários para sortear um dentre n números.