XLII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (29 de setembro de 2018)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Os metrôs de algumas cidades do mundo, como Berlim na Alemanha, não possuem catracas. Em princípio, qualquer um pode entrar em um trem quando quiser, pagando ou não.

O controle de pagamento é feito por amostragem por meio de um método chamado *prova de pagamento*: quando solicitado por um funcionário do metrô - os quais operam "disfarçados" (sem uniforme) dentro dos vagões - o usuário deve mostrar um bilhete válido para a viagem. Caso o usuário não possua o bilhete, ele tem de pagar uma multa.

Neste problema iremos estimar o percentual de usuários do metrô de Berlim que viajam sem pagar.

a) Ocorrem, em média, 1,515 milhão de viagens por dia no metrô de Berlim. Se o metrô de Berlim fica aberto todos os 365 dias do ano, quantas viagens ocorrem em um ano?

b) O preço médio de um bilhete unitário é 3 euros e a multa por viajar sem bilhete válido é de 60 euros. Vamos supor que metade do valor da multa é para cobrir as passagens de todos que viajam sem pagar e a outra metade é uma sobretaxa para tornar a multa alta o suficiente para que a pessoa nunca mais faça isso (equivale a aproximadamente 300 reais, viagem cara, né?). Sabe-se ainda que sejam pegos anualmente por volta de 400 mil usuários sem bilhete. Estime o percentual de viagens feitas sem pagamento em um ano.

PROBLEMA 2

Uma maneira de medir desempenho é por meio de números! Por exemplo, o desempenho de um atacante de futebol pode ser medido pela quantidade de gols que ele marca, ou o desempenho de um estudante em alguma matéria pode ser medido pela nota em uma prova.
Todavia, nem sempre a pontuação em uma prova reflete a habilidade do aluno; pode ser que ela esteja fácil ou difícil demais ou que o estudante tenha mais ou menos "sorte". Para isso, podemos levar em consideração a média de todos os estudantes que fizeram a prova.
Levando em conta tais aspectos, o Professor Truman L. Kelley, de Harvard, publicou em 1923 a sua equação, que estima habilidade da seguinte maneira:

$$\text{Habilidade} = r \cdot \text{Pontuação} + (1 - r) \cdot \text{Média}$$

O número r está entre 0 e 1 e reflete a consistência da avaliação quando comparada com suas edições anteriores; quanto maior o valor de r, mais consistente ela é.
Considere como exemplo as temporadas de 2012, 2013 e 2014 do futebol americano, a NFL. Uma das posições mais importantes desse esporte é a de *quarterback*; vamos nos focar nessa posição. Para cada *quarterback* existe uma medida de desempenho, o *rate*. Vamos usar desempenho para estimar habilidade: a consistência r entre as temporadas de 2012 e 2013 é $r = 0{,}43$, e a média é 85,9.

a) Um dos melhores jogadores da história na posição é Peyton Manning. Estime a sua habilidade, utilizando que o rate dele em 2013 foi 115,1.

b) A consistência r entre as temporadas de 2013 e 2014 é $r = 0{,}22$ e a média é 88,0. O rate de Peyton Manning nesse ano foi 101,5. Estime sua habilidade em 2014.

c) É possível que o rate de um atleta aumente de um ano para o próximo, mas a estimativa de sua habilidade diminua (de fato, isso ocorreu para Aaron Rodgers de 2013 para 2014). Apresente um possível valor de rate de 2013 e um possível valor de rate de 2014, cada um deles entre 85 e 115 (desempenho usual dos melhores quaterbacks), tais que isso aconteça.

PROBLEMA 3

a) Calcule a soma dos algarismos de $9 \cdot 37$, $9 \cdot 124$ e de $9 \cdot 12345678$.

b) Observe: $235 \cdot 9 = 235 \cdot (10 - 1) = 2350 - 235$, e armando a conta obtemos:

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & \cancel{5}^{4} & {}^{1}0 \\ - & 2 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

Considere agora o número $n = (abc)$, em que a, b e c são algarismos com $a < b < c$ (no nosso exemplo, $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$). Mostre que, para todos a, b, c com $1 \leq a < b < c \leq 9$, a soma dos algarismos de $9n$ é 9.

c) Seja $n = (xyzw)$ em que x, y, z e w são algarismos com $9 \geq x > y > z > w \geq 1$. Determine a soma dos algarismos de $9n$. *Não se esqueça que você deve justificar a sua resposta.*

PROBLEMA 4

Zé Roberto deixou seus dois filhos Umberto e Doisberto de castigo, porque eles ficaram estudando Matemática até muito tarde e se esqueceram de estudar para a prova de Português. Mas Zé é muito sensível e, para que seus filhos não fiquem chateados, ele decide fazer um jogo com os dois meninos. Ele combina os seguintes passos:

I. Primeiro Zé coloca sobre uma mesa 8 cartas numeradas de 1 a 8 em fila, em qualquer ordem, com os números virados para cima.

II. Em seguida, ele chama apenas Umberto. Ele pode trocar uma carta de posição com outra carta ou deixar tudo como está. Ou seja, ele faz uma troca ou nenhuma troca.

III. Depois que Umberto sai, Zé vira os números para baixo deixando as faces não numeradas para cima. Todas essas faces dessas cartas são iguais.

IV. Finalmente, Zé chama Doisberto e lhe diz um número de 1 a 8. Um chute de Doisberto é escolher uma carta e virar seu número para cima. Se Doisberto encontrar a carta com o número que Zé disse em 4 ou menos chutes então os filhos vencem o jogo e estão livres do castigo. Umberto não sabe qual número o pai dirá a Doisberto e também não pode dar dicas para seu irmão sobre a sequência de cartas na mesa.

Será que existe alguma estratégia para os irmãos vencerem? Nesse problema mostraremos que sim.

Precisamos de uma estrutura para representar as sequências. Usaremos um diagrama com 8 bolinhas numeradas de 1 a 8. Vamos conectar essas bolinhas com setinhas indicando que o número da bolinha no final da setinha está na posição cujo número está na bolinha no início da setinha. Por exemplo, se a primeira carta da sequência é 7, a segunda carta da sequência é 2 e a terceira carta da sequência é 1 então tem uma setinha da bolinha 1 para a bolinha 7, tem uma setinha da bolinha 2 para a bolinha 2 e uma setinha da bolinha 3 para a bolinha 1. Esse tipo de estrutura com bolinhas e conexões entre elas é conhecido como *grafo orientado*.

Veja o grafo da sequência de cartas (7,2,1,5,4,3,8,6).

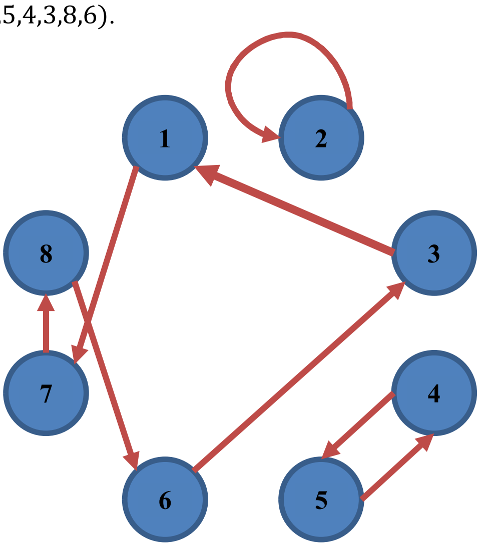


Figura 1

a) Monte o grafo da sequência de cartas (2,3,1,7,4,8,6,5).

Uma sequência de bolinhas que podemos percorrer usando as setinhas e voltar para a bolinha onde começamos é chamada de *ciclo*. O número de bolinhas no ciclo é chamado de tamanho do ciclo. Por exemplo, o grafo da figura 1 é composto por um ciclo de tamanho 1, um ciclo de tamanho 2 e um ciclo de tamanho 5. Sabe-se que esse tipo de grafo é sempre composto por ciclos.

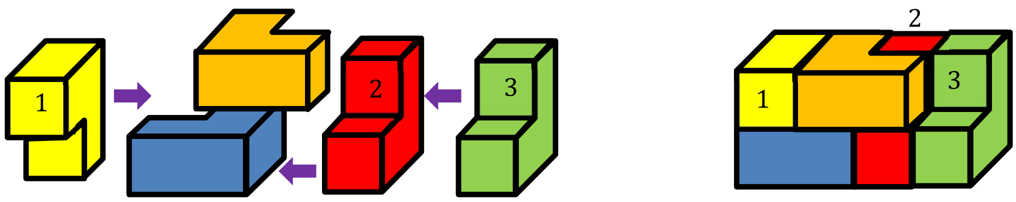
b) Qual é o tamanho do maior ciclo do grafo que você fez no item a?

c) Agora vamos voltar para o nosso problema inicial. Suponha que a sequência de cartas viradas para baixo em que Doisberto deve fazer seus chutes é (7,2,1,5,4,3,8,6) e que Zé pediu a carta 3. Doisberto decide usar a seguinte estratégia: vira a terceira carta da esquerda para a direita. Se ele não acertou, seu próximo chute é na posição do número da carta que ele virou; no nosso exemplo, como a terceira carta é 1, a próxima carta a ser virada é a primeira carta da esquerda para a direita. No caso o número na última carta virada é 7 e a próxima carta a ser virada é a sétima carta. Se Doisberto continuar fazendo seus chutes sempre no número da última carta que ele virou, quantos chutes ele usará para achar o 3?

d) Agora veremos como Umberto pode ajudar. Considere a sequência de cartas (7,2,1,5,4,3,8,6) cujo grafo está na figura 1. Mostre uma escolha das duas cartas que Umberto pode fazer tal que após trocar essas duas cartas o maior ciclo do grafo passe a ser 3. Se Doisberto usar a estratégia do item anterior (procurar uma carta na posição daquele número e no próximo chute tentar o número da última carta virada) no máximo quantos chutes precisará para achar a carta que Zé escolher?
Lembre-se: Umberto não sabe qual número o pai vai escolher. Logo, a troca de Umberto deve fazer com que a estratégia de Doisberto encontre ***qualquer*** *número com tal limite de chutes.*

e) Suponha que Zé decide usar um baralho normal de 52 cartas distintas ao invés de apenas 8 cartas. Monte uma estratégia para Umberto e Doisberto de modo que Doisberto consiga encontrar qualquer carta que Zé escolher em no máximo 26 chutes. *Não se esqueça que você deve justificar a sua resposta.*

PROBLEMA 5
Teresa tem várias peças no formato de L, obtidas unindo três cubos unitários. Ela gosta de montar sólidos que são quase blocos retangulares, mas com um pequeno detalhe: esses sólidos não têm um cubo em exatamente um dos cantos. Vamos chamar esses sólidos de *plocos*.
Nesse problema, vamos usar tabuleiros para indicar como montar plocos. Por exemplo, observe como indicamos a montagem de um ploco $2 \times 4 \times 2$:



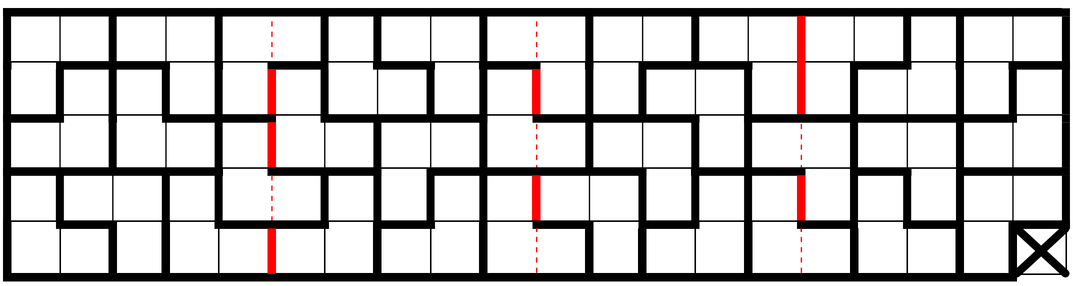
Andar 1 Andar 2

Nessa representação:

- as peças “deitadas” são representadas normalmente sem números;
- as peças com um cubo no andar e dois cubos no “andar de cima” são indicadas com dois números nos dois andares, correspondentes aos cubos do andar de cima. Observe o bloco 1 no exemplo.
- as peças com dois cubos no andar e um cubo no “andar de cima” são indicadas com um retângulo 1×2 ou 2×1, com o cubo no andar de cima indicado por um número dentro do retângulo. Observe os blocos 2 e 3 no exemplo.
- as peças que tem cubos no andar anterior são representadas por números que não estão dentro de regiões com linha mais grossa;
- peças com cubos em dois andares são representadas por números diferentes;
- o canto vazio é indicado com um $\times$ na casinha correspondente.

a) Mostre como montar um ploco $4 \times 5 \times 2$. Use a folha de respostas para fazer a representação como descrito acima.

b) A figura a seguir mostra como preencher um tabuleiro 5×20 com L’s, deixando uma casinha no canto. Usando essa figura, mostre como montar um ploco $5 \times 5 \times 4$. Novamente, use a folha de respostas para fazer a representação.



c) Suponha que Teresa tem um desenho que mostra como cobrir um tabuleiro 200×800 com L’s, deixando uma casinha no canto. Explique como ela poderia usar esse desenho para montar um ploco $200 \times 40 \times 20$.