XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (28 de outubro de 2017)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Em 1865, o economista inglês William Stanley Jevons observou que avanços tecnológicos que aumentaram a eficiência no uso de carvão acompanharam o aumento do consumo de carvão na indústria. Esse fenômeno ficou conhecido como paradoxo de Jevons e afirma que o aumento na eficiência no uso de um recurso, reduzindo a quantidade necessária do recurso para qualquer uso, pode levar ao aumento no consumo total do recurso. Consideraremos nesse problema que *utilidade* é o valor monetário que indica o quanto uma pessoa valoriza algo.

Para ilustrar o fenômeno apresentado, suponha que na casa do Zé a iluminação da sala possa ser feita com uma lâmpada com utilidade de 10 reais por mês, ou seja, esse é o valor monetário que indica o quanto Zé valoriza a iluminação da sua sala com uma lâmpada, ou com duas lâmpadas com utilidade de 15 reais por mês. Sendo o custo de energia por lâmpada de 6 reais por mês, a sua utilidade mensal, dada pela diferença $(\text{utilidade de iluminação}) - (\text{custo com energia})$, é $10 - (1 \times 6) = 4$ reais com uma lâmpada. E, da mesma forma, temos a utilidade mensal de $15 - (2 \times 6) = 3$ reais usando duas lâmpadas. Comparando as duas situações, Zé nota que com uma lâmpada a utilidade mensal é maior. Por isso, ele opta por usar apenas uma lâmpada.

a) Após um avanço tecnológico, houve um aumento na eficiência do uso da energia e o custo com energia por lâmpada passou a ser apenas de 4 reais por mês. Considerando que as utilidades de iluminação são as mesmas, calcule a utilidade mensal para com uma lâmpada e com duas lâmpadas. Considerando a utilidade mensal, qual opção Zé deveria escolher?

b) Suponha que haja apenas 1440 reais disponíveis para iluminar a sala de Zé. Depois disso, não haveria mais recursos para iluminar a sala de Zé. Considerando as duas situações, com custos de energia de 6 reais por mês por lâmpada e de 4 reais por mês por lâmpada, e que Zé escolha a opção dentre uma ou duas lâmpadas com maior utilidade mensal em cada caso, por quantos anos seria possível iluminar a sala do Zé em cada uma das duas situações?

David Owen, em seu artigo *The Efficiency Dilemma*, fala sobre o paradoxo de Jevons e usa alguns dados para reforçar a existência desse paradoxo. Por exemplo, entre 1993 e 2005, nos Estados Unidos os aparelhos de ar-condicionado tiveram sua eficiência média aumentada em 28%. Com isso, um aparelho novo em 2005 consumia em média apenas 78% do que o seu similar em 1993. Esperava-se que essa redução de 22% causasse uma redução no consumo de energia. Porém o consumo médio de energia com os aparelhos por residência aumentou 37% nesse período.

Já o economista James Barrett critica o paradoxo e defende que não é o aumento de eficiência que causa o aumento de consumo, mas que o aumento de eficiência em geral não é suficiente para compensar o aumento de consumo, que acompanha o crescimento da economia. Vamos estudar alguns dos argumentos de Barrett. A primeira observação de James é que as pessoas não trocam de ar-condicionado sempre que um modelo novo é lançado. Considerando que em média uma família usa um ar-condicionado por 20 anos, Barrett estima que, em média, um aparelho em 2005 consome 90% da energia que o seu similar consumia em 1993. Além disso, as pessoas passaram a usar aparelhos maiores em suas residências e estima-se que isso causou um aumento de aproximadamente 30% no consumo de energia com esses aparelhos por residência.

c) O tamanho médio das residências americanas passou de 195 metros quadrados em 1993 para 226 metros quadrados em 2005. Determine o aumento percentual x do tamanho médio das residências?

d) Admita que o aumento percentual x do tamanho médio das residências seja igual ao aumento percentual do consumo de energia por residência. Considere que o consumo de energia sofreu uma redução de 10% por conta aumento da eficiência, um aumento de 30% por conta do tamanho dos aparelhos e um aumento percentual x por conta do aumento do tamanho das residências. Por se tratar apenas de uma estimativa, tome essas variações como consecutivas. Sendo assim, estime o aumento percentual no consumo de energia com ar-condicionado por residência.

PROBLEMA 2

Alguns raciocínios incorretos utilizando probabilidades podem aparecer em situações reais de júri. De fato, o impacto que podem ter no resultado de julgamentos é de tal relevância que alguns desses raciocínios recebem nomes especiais, por exemplo: *Falácia do Procurador*, *Falácia do Advogado de Defesa*, *Paradoxo de Berkson*. Nesse problema vamos conhecer alguns desses erros baseados em casos reais, infelizmente.

Um dos casos mais notórios do mau uso de probabilidades em julgamentos é o de Sally Clark.
A inglesa foi acusada em 1998 de ter matado seu primeiro filho quando tinha 11 semanas de idade e o segundo quando tinha 8 semanas de idade. Mortes de crianças em tão tenra idade e para as quais os médicos não encontram uma explicação são chamadas *morte no berço* ou *síndrome da morte súbita infantil (SMSI)* e os pais não são considerados suspeitos. Porém como o segundo filho tinha alguma possível evidência de ter sido asfixiado, a mãe foi levada a julgamento.
A acusação tinha o renomado pediatra Sir Roy Meadow, o qual afirmou que "a chance de uma morte no berço em uma família do status social da família Clark é de cerca de uma em 8.543. Isso significa que a chance de haver duas mortes dessas na mesma família é igual ao quadrado desse número: uma chance em cerca de 73 milhões." Os testemunhos de Meadow foram muito decisivos e Sally Clark acabou condenada, em 1999, à prisão perpétua.
Em 2001, a Real Sociedade de Estatística enviou uma queixa pública para o presidente da Câmara dos Lordes na qual expunha os erros de Meadow e a gravidade da situação. "Essa abordagem é, de forma geral, estatisticamente inválida. Seria válida apenas se os casos de SMSI surgissem independente dentro das famílias, premissa que necessitaria de justificação empírica. Não só essa justificação empírica não foi fornecida no caso, como também há fortes razões a priori para supor que a premissa seja falsa. Pode muito bem haver fatores genéticos ou ambientais desconhecidos que predisponham famílias à SMSI, de modo que um segundo caso na família se torne muito mais provável. "
Essa análise, associada à disponibilização de registros médicos para a defesa que mostravam que o segundo bebê estava sofrendo de uma séria infecção bacteriana quando morreu, resultaram na libertação de Sally em 2003. Lamentavelmente, ela nunca se recuperou da experiência traumática e faleceu por intoxicação alcoólica aguda em 2007.
a) Mostre que podemos concluir a partir dos dados do enunciado que Meadow supôs que os eventos descritos a seguir são independentes:
A: primeiro filho morre por SMSI
B: segundo filho morre por SMSI
b) Registros históricos recentes da Inglaterra indicam que de 5 mil bebês nascidos após uma morte por SMSI na família, oito também tiveram morte no berço. Levando em conta esse dado, estime a probabilidade, nas condições do problema, de haver duas mortes por SMSI em uma mesma família.
Nos itens a e b, você pode desejar usar que:
$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A)$ *em que* $p(B|A)$ *é a probabilidade condicional do evento* B *dado o* A
A *e* B *são eventos independentes se, e somente se,* $p(A|B) = p(A)$

c) Um outro raciocínio incorreto que pode aparecer é motivado por tomarmos um conjunto de suspeitos grande demais. Vamos supor que temos uma amostra de DNA obtida em uma cena de crime. Imagine que comparemos essa amostra com uma base de dados de 20 mil pessoas e que a probabilidade de haver coincidência dessa amostra com o de uma pessoa qualquer seja de 1 em 10 mil. Se encontramos alguém tal que a coincidência ocorra, poderíamos dizer que a chance dessa pessoa ser inocente é de 1 em 10 mil? Veremos que não, pois como 20 mil pessoas foram testadas, houve 20 mil oportunidades de a coincidência ocorrer e é bem provável que aconteça para um grupo desse tamanho, mesmo que nenhuma dessas pessoas tenha chance alguma de ter cometido o crime. É claro que se a pesquisa é restrita a um grupo pequeno de pessoas – por exemplo, as que tiveram acesso à cena do crime – a probabilidade de a pessoa ser inocente é, realmente, pequena.
Calcule a probabilidade de que em um grupo qualquer de 20 mil pessoas encontremos pelo menos uma para a qual a amostra coincida.
Você pode desejar usar nesse item que $\log 9999 \approx 3{,}9999566$ *e* $10^{-0{,}868} \approx 0{,}136$.

PROBLEMA 3
Nesse problema veremos um algoritmo que permite escrever (se possível) expressões polinomiais como somas de quadrados, com o auxílio de matrizes. Por exemplo, seja $f(x,y) = 2x^4 + 5y^4 - x^2y^2 + 2x^3y$.
O primeiro passo é escrever f na *forma quadrática*

$$f = v^T Q v,$$

em que v é uma matriz coluna com monômios, Q é uma matriz simétrica cujas entradas são constantes reais e v^T é a transposta de v. Ou seja, as variáveis ficam somente em v e as constantes, em Q. No nosso caso, como $v^T Q v$ eleva v "ao quadrado", usamos $v = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \end{bmatrix}$.
Você pode querer utilizar o fato de que a matriz transposta é obtida pela troca de linhas por colunas em uma determinada matriz. Em outras palavras, se $M = (m_{ij})_{r \times s}$ *e* $N = (n_{ij})_{s \times r}$*, então* $N = M^T$ *quando* $n_{ij} = m_{ji}$ *para todo* $1 \le i \le r$ *e* $1 \le j \le s$*. Além disso, uma matriz P é simétrica quando é igual à sua transposta, ou seja,* $P = P^T$.

a) Escreva f na forma quadrática, ou seja, encontre constantes q_{ij}, $1 \le i \le j \le 3$, tais que

$$\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \end{bmatrix} = 2x^4 + 5y^4 - x^2y^2 + 2x^3y \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Aqui adotamos $q_{33} = 5$ para que a resposta seja única (sim, a matriz Q não é necessariamente única!)
b) O nosso próximo passo é encontrar uma matriz L e uma matriz diagonal D tal que $Q = L^T D L$. Uma matriz diagonal é uma matriz cujas entradas fora da diagonal principal são iguais a zero. Ou seja, queremos fazer

$$Q = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ \ell_{12} & \ell_{22} & \ell_{32} \\ \ell_{13} & \ell_{23} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix}.$$

Mas não faremos isso diretamente (não abra essa última conta!). Para isso, utilizaremos a identidade

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & BC^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B^T & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ C^{-1}B^T & I_n \end{bmatrix}, \qquad (*)$$

em que A, B e C são matrizes de tamanhos $m \times m$, $m \times n$ e $n \times n$, respectivamente, e I_k é a matriz identidade $k \times k$. Por exemplo, vamos escrever $R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ na forma $R = L^T DL$: primeiro tomamos $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = [1]$ (podemos fazer outras escolhas). Com isso,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ih, a matriz do meio não é diagonal! Tudo bem: quebramos a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ em $A = [1]$, $B = [1]$ e $C = [2]$, e fazemos de novo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Substituindo, obtemos

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo o produto das duas últimas matrizes obtemos

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

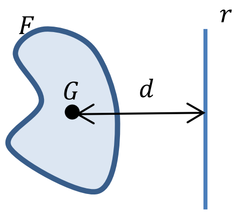
Agora é a sua vez! Encontre as matrizes L e D para a sua matriz Q que você encontrou no item anterior.

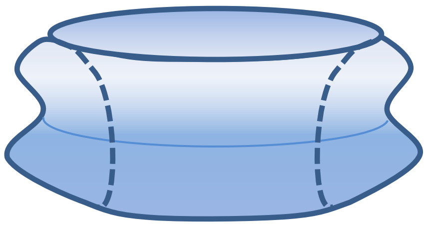
c) Agora que provamos que $f(x,y) = v^T Qv = v^T L^T DLv = (Lv)^T D(Lv)$, escreva $f(x,y)$ como soma de quadrados.

PROBLEMA 4

Um dos últimos grandes teoremas gregos é o *teorema de Pappus-Guldin*:

Sendo F uma figura plana com área S e r uma reta a uma distância d do centro de gravidade G de F. Então o volume do sólido obtido através da rotação de F em torno de r é $2\pi Sd$.



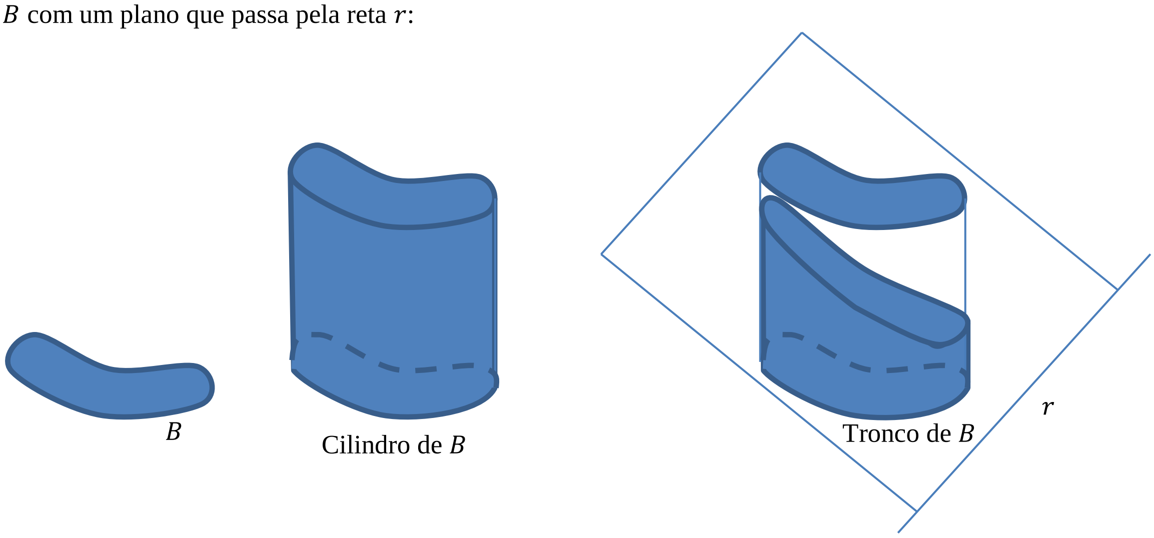


$V = 2\pi Sd$

Esse fato foi descoberto por Pappus de Alexandria no século IV e reformulado com foco em centros de gravidade por Paul Guldin entre 1635 e 1641. Nenhum dos dois deu uma demonstração formal para o teorema. Em 1668, James Gregory, um matemático e astrônomo escocês que deu a primeira demonstração do teorema fundamental do Cálculo, provou o teorema. Nesse problema, iremos juntos desenvolver essa demonstração.

A ideia principal de Gregory foi considerar uma espécie de generalização de *cilindro*, que chamaremos apenas de cilindro, cujo volume é fácil de calcular (área da base vezes altura). Um *tronco* desse cilindro e aí sim considerar o sólido de revolução.

Dada uma figura B, um *cilindro* de B de altura h é obtido através da união de segmentos de reta de comprimento h perpendiculares ao plano de B, com uma das extremidades em B. Dada também uma reta de revolução r, dois *troncos* de B são obtidos cortando o cilindro de B com um plano que passa pela reta r:



Nos passos a seguir, usamos duas possíveis representações da figura F, mas para os itens a e b não usaremos o formato de F e, portanto, os resultados obtidos podem ser usados para qualquer figura F, incluindo a figura F apresentada no item c.
Antes de começar, precisamos definir uma medida do tronco: dado um tronco de F com reta de revolução r, o plano de corte intersecta o plano da base superior em uma reta s. Traçamos um plano α que contém s e é perpendicular ao plano de F. A distância de r a α será denominada *raio de rotação*.

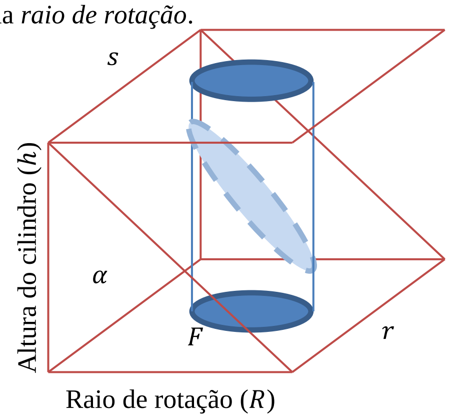
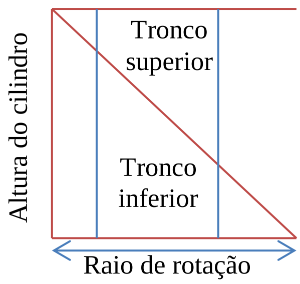
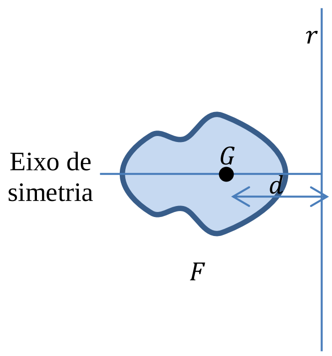
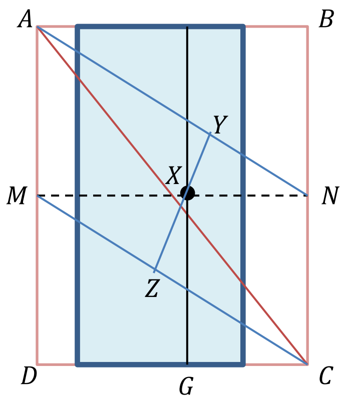


Figura 1



a) Para a primeira parte desse problema, iremos usar uma variante do *princípio de Cavalieri*, que diz que se seccionarmos dois sólidos por planos paralelos entre si e obtivermos áreas de secções numa razão constante k, então a razão entre os volumes é também k. Em outras palavras, se para todas secções paralelas S_1 e S_2 dos sólidos tivermos $\frac{\text{área}S_1}{\text{área}S_2} = k$, então $\frac{V_1}{V_2} = k$.
No nosso exemplo, faremos secções perpendiculares ao eixo de rotação, ou seja, usaremos planos perpendiculares à reta r. Note que esses planos são paralelos entre si. A secção vista na Figura 1 é um exemplo de corte feito por um desses planos. Na Figura 1 está indicada a secção relativa ao tronco inferior, que forma um trapézio.
Copie a Figura 1 no seu Bloco de Respostas e desenhe a secção relativa ao sólido de revolução de F em torno de r. Em seguida, calcule a razão entre as áreas das secções relativas ao tronco inferior de F e o sólido de revolução de F em torno de r.
b) Prove que a razão entre os volumes do tronco inferior de F e do sólido de revolução de F em torno de r é $\frac{\text{tronco}(F)}{\text{rev}(F)} = \frac{h}{2\pi R}$, em que h é a altura do cilindro e R é o raio de rotação.
c) Agora relacionaremos os volumes do tronco de F com o do cilindro de F, e também analisaremos o centro de massa do tronco. Faremos o caso em que F é simétrico e possui eixo de simetria perpendicular à reta de rotação r. Deste modo, os centros de gravidade, tanto do tronco, como do cilindro pertencem ao plano de simetria do tronco e do cilindro. A seguir, apresentamos uma figura F que será usada como base do cilindro e a secção transversal que contém o eixo de simetria:





Na figura anterior, M e N são pontos médios das alturas AD e BC do cilindro de F. Além disso, X, Y e Z são os centros de gravidade do cilindro, do tronco superior e do tronco inferior de F, respectivamente. Usando a simetria e o fato de que se um plano divide um sólido em dois sólidos de mesmo volume então o centro de gravidade está sobre esse plano, explique por que Y está sobre a reta AN.
d) Sabe-se que se dois sólidos têm volumes V_1 e V_2 e centros de gravidade X_1 e X_2 então o centro de gravidade da união disjunta dos dois sólidos é o ponto X sobre o segmento X_1X_2 tal que $X_1X \cdot V_1 = X_2X \cdot V_2$. Usando esse fato, prove que a razão entre os volumes do tronco inferior e do cilindro de F é

$$\frac{\text{tronco}(F)}{\text{cilindro}(F)} = \frac{d}{R},$$

em que d é a distância do centro de gravidade G de F à reta de rotação r e R é o raio de rotação, como definido anteriormente.
e) Conclua a demonstração do teorema de Pappus-Guldin para figuras F simétricas.

A demonstração acima só funciona para F simétrico, mas se F não for simétrico, basta tomar uma reta t qualquer que não corta F e fazer uma cópia simétrica F' de F com relação a t; aplicamos o teorema para $F \cup F'$. Efetivamente, para provar Pappus-Guldin basta considerar o caso em que F é simétrico. Você não precisa fazer isso!

PROBLEMA 5

A sequência de Thue-Morse é formada usando apenas 0's e 1's. Ela é definida começando-se com um 0 e acrescentando-se repetidamente o complemento binário da sequência (trocando-se 1 por 0 e 0 por 1) até o ponto atual. Como o complemento binário de 0 é 1, então ficamos com 01. Como o complemento de 01 é 10, ficamos com 0110. Continuando, temos os próximos 4 termos 1001 e os 8 termos seguintes 10010110. Temos a sequência

$$0|1|10|1001|10010110|1001011001101001\ ...$$

As barras foram colocadas para facilitar o entendimento da construção da sequência e das propriedades que estudaremos a seguir.

Essa sequência foi estudada pela primeira vez em 1851 pelo matemático francês Eugène Prouhet, mas só ficou famosa após os trabalhos do noruguês Axel Thue em 1906 e do americano Marston Morse em 1921. Daí vem o nome Thue-Morse. Nesse problema, vamos provar uma das propriedades surpreendentes dessa sequência: nenhum bloco de dígitos F se repete três vezes consecutivas nessa sequência. Por exemplo, não existe 111 e não existe 010010010, pois seriam repetições dos blocos "1" e "010" três vezes consecutivas.

Usaremos a notação a_0 para o primeiro termo da sequência, a_1 para o segundo e, assim, sucessivamente. Veja que após cada barra temos um termo a_{2^n} e, por isso, as potências de 2 serão muito importantes no nosso estudo.

a) Mostre que, para $0 \le N < 2^n$, temos $a_{2^n+N} \neq a_N$.

b) Considere os números inteiros $0 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_t$. Mostre que

$$a_{2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_t}} = \begin{cases} 0, \text{se } t \text{ é par} \\ 1, \text{se } t \text{ é ímpar} \end{cases}$$

c) Cada número natural pode ser escrito de maneira única como soma de potências de 2 distintas. Chamamos isso de *representação binária* do número.

Usando o item b, prove que $a_{2n} = a_n$ e que $a_{2n} \neq a_{2n+1}$, para todo n natural, e conclua que na sequência de Thue-Morse não existem 3 termos consecutivos iguais.

Vamos agora aprofundar a análise dessa sequência. Suponha que ocorra na sequência de Thue-Morse a situação FFf onde F é um bloco de $k \ge 1$ dígitos e f é o primeiro dígito de F. Em outras palavras,

$$a_{i+1}a_{i+2}\ ...\ a_{i+k}|\ a_{i+k+1}a_{i+k+2}\ ...\ a_{i+2k}|\ a_{i+2k+1}$$

em que $a_{i+1} = a_{i+k+1} = a_{i+2k+1}$, $a_{i+2} = a_{i+k+2}$, ..., $a_{i+k} = a_{i+2k}$, ou seja, $a_{i+j} = a_{i+j+k}$ para $j = 1,2, ..., k$.

Vamos provar que isto não pode acontecer fazendo os casos k ímpar e k par.

d) Se k é ímpar, então podemos observar que exatamente um dos números $i + j$ ou $i + j + k$ é par. Isso, combinado com o resultado do item c, mostra que o bloco F tem que ser uma sequência alternada de zeros e uns.

Explique por que, nesse caso, valeria as seguintes igualdades

$$a_{i+1} = a_{i+k} = a_{i+k+1} = a_{i+2k} = a_{i+2k+1}$$

Em seguida, mostre que é impossível satisfazer todas essas igualdades e conclua que não existe o bloco F no caso em que k é ímpar.

e) Para k par, se existe FFf, vamos tomar a **primeira vez** que isso ocorre na sequência, ou seja, tomamos o menor i possível. Seja $k = 2t$ para um inteiro positivo t.

Se o i mínimo é par, temos $i = 2s$ e nosso pedaço FFf de interesse é

$$a_{2s+1}a_{2s+2}\ ...\ a_{2s+2t}|\ a_{2s+2t+1}a_{2s+2t+2}\ ...\ a_{2s+4t}|\ a_{2s+4t+1}$$

Mostre que vale $a_{2s} = a_{2s+2t}$.

Se tomarmos $F' = a_{2s}a_{2s+1}\ ...\ a_{2s+2t-1}$ teremos os blocos $F'F'f'$ acontecendo antes de FFf contrariando a suposição de que FFf é a primeira ocorrência.

f) Se o i mínimo é ímpar, temos $i = 2s - 1$ e nosso pedaço FFf de interesse é

$$a_{2s}a_{2s+1}\ ...\ a_{2s-1+2t}|\ a_{2s+2t}a_{2s+2t+1}\ ...\ a_{2s-1+4t}|\ a_{2s+4t}$$

Mostre que podemos tomar o bloco $F'' = a_s a_{s+1}\ ...\ a_{s-1+t}$ de modo que $F''F''f''$ aconteceria antes de FFf.

Isso conclui a demonstração, pois chegaremos em blocos com k ímpar (já vimos no item d que não existem) ou em blocos com k par sempre anteriores. Não poderá existir um primeiro e, portanto, não existe tal situação.