XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (28 de outubro de 2017)

Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Suponha que você está lendo um livro e encontra 7 erros de digitação em 20 páginas. Você provavelmente imagina que a chance de haver erro de digitação em uma página é $\frac{7}{20}$. E se você não encontrasse erros de digitação nas 20 páginas? Você concluiria que que a probabilidade de erro de digitação no livro todo (que poderia ter, digamos, 500 páginas) é zero, ou seja, que o livro não tem erros de digitação? (Você não precisa responder a essa pergunta. 😉)

Agora imagine uma situação rara como, por exemplo, ter ouvido absoluto (ou seja, a habilidade de distinguir notas musicais sem ter um tom de referência). Sabe-se que pessoas com ouvido absoluto existem, mas são raras. Como estimar a proporção de pessoas com ouvido absoluto, mesmo tendo uma amostra de 1000 pessoas que não têm ouvido absoluto?

A resposta vem da Estatística: normalmente queremos estimar proporções p com 95% de confiança. Em geral, supomos que o valor correto é p e estimamos a chance de haver ocorrências de um evento raro em n elementos como sendo 95%. Ou seja, resolvemos a equação $1-(1-p)^n = 0{,}95$, que é equivalente a $(1-p)^n = 0{,}05$. Pode-se mostrar que, para $n \geq 500$ usamos a aproximação $p \cong \frac{3}{n}$. Ou seja, na prática, se não encontramos ocorrência de um evento raro, estimamos a chance de ocorrência como $\frac{3}{n}$.

a) Suponha que vimos uma amostra de 1000 pessoas e não encontramos pessoas que consigam dobrar a língua em formato de onda, outra característica rara. Estime a chance de uma pessoa escolhida aleatoriamente conseguir dobrar a língua em formato de onda.

b) Estudos científicos afirmam que 1 a cada 10000 pessoas tem ouvido absoluto. Se um desses estudos veio de uma amostra sem pessoas com ouvido absoluto, quantas pessoas há nessa amostra?

PROBLEMA 2

Em 1865, o economista inglês William Stanley Jevons observou que avanços tecnológicos que aumentaram a eficiência no uso de carvão acompanharam o aumento do consumo de carvão na indústria. Esse fenômeno ficou conhecido como paradoxo de Jevons e afirma que o aumento na eficiência no uso de um recurso, reduzindo a quantidade necessária do recurso para qualquer uso, pode levar ao aumento no consumo total do recurso. Consideraremos nesse problema que *utilidade* é o valor monetário que indica o quanto uma pessoa valoriza algo.

Para ilustrar o fenômeno apresentado, suponha que na casa do Zé a iluminação da sala possa ser feita com uma lâmpada com utilidade de 10 reais por mês, ou seja, esse é o valor monetário que indica o quanto Zé valoriza a iluminação da sua sala com uma lâmpada, ou com duas lâmpadas com utilidade de 15 reais por mês. Sendo o custo de energia por lâmpada de 6 reais por mês, a sua utilidade mensal, dada pela diferença (utilidade de iluminação) – (custo com energia), é $10-(1\times 6)=4$ reais com uma lâmpada. E, da mesma forma, temos a utilidade mensal de $15-(2\times 6)=3$ reais usando duas lâmpadas. Comparando as duas situações, Zé nota que com uma lâmpada a utilidade mensal é maior. Por isso, ele opta por usar apenas uma lâmpada.

a) Após um avanço tecnológico, houve um aumento na eficiência do uso da energia e o custo com energia por lâmpada passou a ser apenas de 4 reais por mês. Considerando que as utilidades de iluminação são as mesmas, calcule a utilidade mensal para com uma lâmpada e com duas lâmpadas. Considerando a utilidade mensal, qual opção Zé deveria escolher?

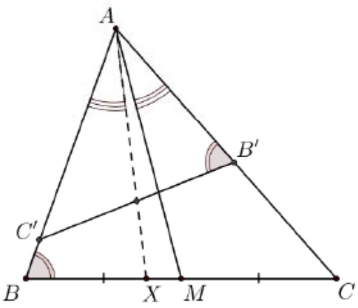
b) Suponha que haja apenas 1440 reais disponíveis para iluminar a sala de Zé. Depois disso, não haveria mais recursos para iluminar a sala de Zé. Considerando as duas situações, com custos de energia de 6 reais por mês por lâmpada e de 4 reais por mês por lâmpada, e que Zé escolha a opção dentre uma ou duas lâmpadas com maior utilidade mensal em cada caso, por quantos anos seria possível iluminar a sala do Zé em cada uma das duas situações?

David Owen, em seu artigo *The Efficiency Dilemma*, fala sobre o paradoxo de Jevons e usa alguns dados para reforçar a existência desse paradoxo. Por exemplo, entre 1993 e 2005, nos Estados Unidos os aparelhos de ar-condicionado tiveram sua eficiência média aumentada em 28%. Com isso, um aparelho novo em 2005 consumia em média apenas 78% do que o seu similar em 1993. Esperava-se que essa redução de 22% causasse uma redução no consumo de energia. Porém o consumo médio de energia com os aparelhos por residência aumentou 37% nesse período.

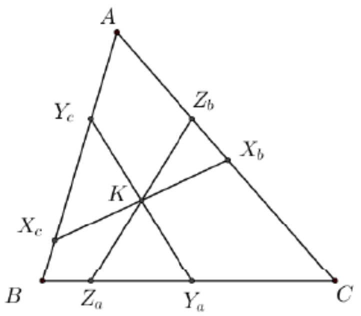
Já o economista James Barrett critica o paradoxo e defende que não é o aumento de eficiência que causa o aumento de consumo, mas que o aumento de eficiência em geral não é suficiente para compensar o aumento de consumo, que acompanha o crescimento da economia. Vamos estudar alguns dos argumentos de Barrett. A primeira observação de James é que as pessoas não trocam de ar-condicionado sempre que um modelo novo é lançado. Considerando que em média uma família usa um ar-condicionado por 20 anos, Barrett estima que, em média, um aparelho em 2005 consome 90% da energia que o seu similar consumia em 1993. Além disso, as pessoas passaram a usar aparelhos maiores em suas residências e estima-se que isso causou um aumento de aproximadamente 30% no consumo de energia com esses aparelhos por residência.

c) O tamanho médio das residências americanas passou de 195 metros quadrados em 1993 para 226 metros quadrados em 2005. Determine o aumento percentual x do tamanho médio das residências?
d) Admita que o aumento percentual x do tamanho médio das residências seja igual ao aumento percentual do consumo de energia por residência. Considere que o consumo de energia sofreu uma redução de 10% por conta aumento da eficiência, um aumento de 30% por conta do tamanho dos aparelhos e um aumento percentual x por conta do aumento do tamanho das residências. Por se tratar apenas de uma estimativa, tome essas variações como consecutivas. Sendo assim, estime o aumento percentual no consumo de energia com ar-condicionado por residência.

PROBLEMA 3
Na primeira fase da OPM 2017 vimos fatos sobre a simediana. Nesse problema, vamos apresentar mais fatos sobre elas.
Considere um triângulo ABC e M o ponto médio do lado BC. A ceviana AM é conhecida como mediana do triângulo relativa ao vértice A. A simediana relativa ao vértice A é a reta que também passa pelo ponto A e que forma os mesmos ângulos que a mediana, mas trocando a ordem dos ângulos. Na figura a seguir temos as representações da mediana AM e da simediana AX. Tome os pontos B' sobre o lado AC e C' sobre o lado AB. Dizemos que a reta $B'C'$ é *antiparalela* a BC quando os ângulos $\angle AB'C'$ e $\angle ABC$ são iguais.



a) Mostre que os triângulos ABC e $AB'C'$ são semelhantes e conclua que a reta AX passa pelo ponto médio de $B'C'$.
O ponto simediano de um triângulo é o ponto por onde passam as três simedianas do triângulo. Seja K o ponto simediano do triângulo ABC. Através do ponto K são traçadas retas antiparalelas X_bX_c, Y_cY_a e Z_aZ_b aos lados BC, CA e AB, respectivamente.



b) Prove que o triângulo KZ_aY_a é isósceles.
c) Prove que os seis pontos X_b, X_c, Y_c, Y_a, Z_a e Z_b são equidistantes do ponto K. Isto implica que existe uma circunferência de centro K que passa por estes seis pontos. Essa circunferência é conhecida como *Primeiro Círculo de Lemoine.*

PROBLEMA 4
Dizemos que um conjunto S de números inteiros positivos é *diofantino* se existe um polinômio $P(x, y_1, \dots, y_k)$ com coeficientes inteiros tal que $x \in S$ se, e somente se, existem inteiros positivos $y_1, \dots, y_k$ tais que $P(x, y_1, \dots, y_k) = 0$. Diremos que P *é um polinômio associado ao conjunto* S.
Por exemplo, os números ímpares positivos formam um conjunto diofantino, pois, como $x = 2y - 1 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$, podemos tomar $P(x, y) = x - 2y + 1$ e temos que x pertence ao conjunto dos ímpares positivos se, e somente se, existe y tal que $P(x, y) = x - 2y + 1 = 0$.
a) A partir da equação $x = (y + 1)(z + 1)$, prove que os números compostos formam um conjunto diofantino.
b) Considere dois conjuntos diofantinos A e B aos quais estão associados, respectivamente, polinômios P_A e P_B. Mostre que um polinômio associado a $A \cap B$, intersecção dos conjuntos A e B, é $(P_A)^2 + (P_B)^2$.
Nesse item você pode querer utilizar que a intersecção de dois conjuntos é formada apenas pelos elementos que pertencem a ambos os conjuntos.

c) Dados P_A e P_B, determine um polinômio associado a $A \cup B$, união dos conjuntos A e B.
Nesse item você pode querer utilizar que a união de dois conjuntos é formada pelos elementos que pertencem apenas ao conjunto A ou apenas ao conjunto B ou a ambos os conjuntos.

Considere a sequência de Fibonacci: $F_0 = 0, F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Nos próximos itens provaremos que os números inteiros positivos pertencentes à sequência de Fibonacci formam um conjunto diofantino $F = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots\}$.
Considere os polinômios $R(x, y) = x^2 - xy - y^2 + 1$ e $S(z, w) = z^2 - zw - w^2 - 1$.
d) Resolva a equação $R(1, y) = 0$.
e) Mostre que $S(x, y) = 0$ é equivalente a $R(y, x - y) = 0$, isto é, o par ordenado (X, Y) é raiz do polinômio S se, e somente se, o par ordenado $(Y, X - Y)$ é raiz do polinômio R. Conclua que as raízes de R são os pares (F_{2k}, F_{2k-1}) e as raízes de S são os pares (F_{2k+1}, F_{2k}), para k inteiro positivo.
f) Mostre que o conjunto F dos números de Fibonacci inteiros positivos é diofantino.

PROBLEMA 5

O jogo da velha pode ser generalizado para ser jogado em um hipercubo k-dimensional de aresta n, dividido em n^k hipercubinhos unitários. Usualmente ele é jogado sobre um quadrado (hipercubo 2-dimensional) de lado (aresta) 3, dividido em $3^2 = 9$ casinhas (quadradinhos unitários).

Os dois jogadores alternam seus lances. Em cada jogada, o jogador da vez marca em uma das n^k casinhas o seu símbolo – $\times$ (xis) para o primeiro jogador e O (bolinha) para o segundo. O primeiro jogador a completar n símbolos alinhados (vale qualquer reta, incluindo qualquer tipo de diagonal) é o vencedor. Se todas as casinhas são preenchidas, mas nenhum jogador completa n símbolos iguais alinhados, o jogo empata.

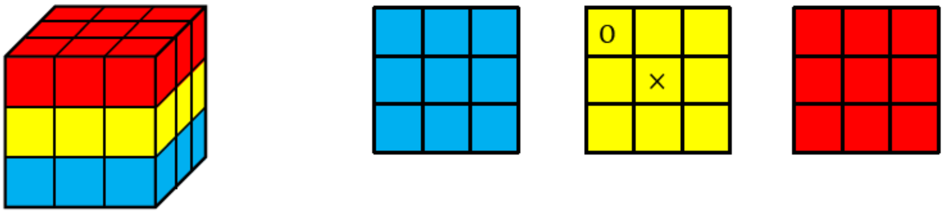
Como o primeiro lance é uma vantagem, com a estratégia ideal, o primeiro jogador não deve perder nunca (se alguma vez você começou o jogo e perdeu, você usou uma estratégia ruim, bem ruim). Então podemos esperar que o primeiro jogador busque a vitória, enquanto o segundo tenta empatar. De fato, os principais especialistas acreditam que, para um dado valor de k, existe um valor N de n tal que para hipercubos de aresta menor do que N o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora e, para hipercubos de aresta maior ou igual a N, o segundo jogador pode obter o empate. Nesse problema teremos algumas evidências de que isso realmente ocorre em duas, três e, mesmo, quatro dimensões!

a) Uma das principais estratégias de empate é a de *emparelhamento*: para cada jogada do primeiro jogador – excetuando uma possível escolha da casa central, quando houver uma – se estabelece uma resposta distinta do segundo de modo que, no final da partida, tais respostas impedem o primeiro jogador de completar todas as casinhas de um segmento de reta.

Explique por que o diagrama a seguir mostra uma estratégia de emparelhamento para o quadrado de lado 5.

v	i	a	a	f
j	b	h	u	b
c	i	$\times$	g	c
d	u	h	d	f
j	e	e	g	v

b) Você já jogou o jogo da velha tridimensional? Para $n = 2$, o jogo é uma vitória muito fácil do primeiro jogador, logo na sua segunda jogada. Para $n = 3$, o primeiro jogador ainda vence. Para a situação apresentada a seguir em que cada um dos jogadores fez uma jogada, mostre uma segunda jogada do primeiro jogador de modo que ele garanta a vitória. Atenção: não é necessário apresentar todas as possíveis segundas jogadas que garantam a vitória. Justifique por que essa segunda jogada garante a vitória do primeiro jogador.

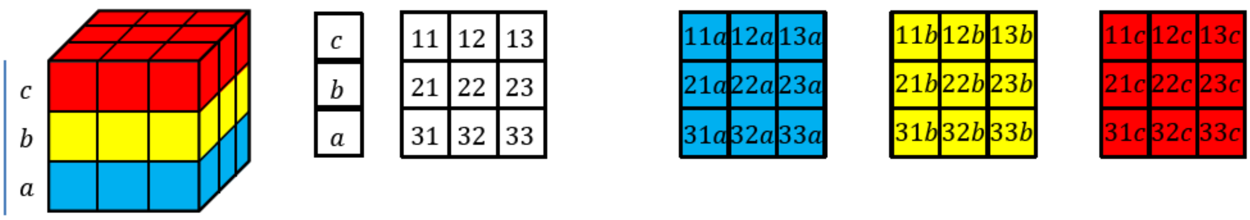


c) Podemos verificar que em um quadrado de lado n existem $2n + 2$ alinhamentos (segmentos de reta) que, se preenchidos com apenas um dos símbolos, levam à vitória: n horizontais, n verticais e as duas diagonais. Quantos alinhamentos (segmentos de reta) desse tipo existem em um cubo de aresta n?

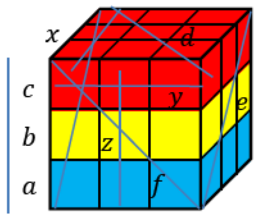
d) Mostre que não existe uma estratégia de emparelhamento para o cubo de aresta 7. Atenção: isso não significa que é impossível empatar em um cubo de aresta 7. Quer dizer apenas que a estratégia de emparelhamento, tal como descrita no item a, não pode ser aplicada.

e) Para aprendermos a "imaginar" um hipercubo na quarta dimensão, vamos inicialmente observar como podemos visualizar um cubo a partir de duas figuras: uma bidimensional e uma unidimensional.

Considere um quadrado de lado 3 em que cada uma de suas $3^2 = 9$ casinhas está identificada com um par de números e uma outra figura formada por três casinhas identificadas com letras diferentes. Observe que essa segunda figura é, essencialmente, um segmento de reta, ou seja, unidimensional.



O cubo é, então, formado por casinhas identificadas pela justaposição de um par de números e uma das letras.



$11a$	$12a$	$13a$
$21a$	$22a$	$23a$
$31a$	$32a$	$33a$

$11b$	$12b$	$13b$
$21b$	$22b$	$23b$
$31b$	$32b$	$33b$

$11c$	$12c$	$13c$
$21c$	$22c$	$23c$
$31c$	$32c$	$33c$

Observe que os alinhamentos nesse cubo são formados pelas casinhas que diferem apenas no primeiro número (por exemplo, reta x); apenas no segundo número (por exemplo, reta y); apenas na letra (por exemplo, reta z); nos dois números (por exemplo, reta d); no primeiro número e na letra (por exemplo, reta e); no segundo número e na letra (por exemplo, reta f); ou nos três (diagonais do cubo). Em resumo, os alinhamentos são formados quando "juntamos" um segmento vertical do quadrado original com uma casinha do segmento de reta; um segmento horizontal do quadrado original com uma casinha do segmento de reta; uma casinha do quadrado original com o segmento de reta; uma diagonal do quadrado original com uma casinha do segmento de reta; um segmento vertical do quadrado original com o segmento de reta; um segmento horizontal do quadrado original com o segmento de reta; ou uma diagonal do quadrado original com o segmento de reta.
Podemos resumir tal "operação" que nos permite obter todos os alinhamentos do cubo da seguinte maneira: "juntamos" um segmento de reta de uma das figuras com uma casinha da outra ou um segmento de reta de uma com um segmento de reta da outra.
Agora façamos a mesma operação para os dois quadrados de lado 4 apresentados a seguir. Não precisa desenhar a figura obtida, ela é um hipercubo de aresta 4 que é formado por 4^4 casinhas. Cada casinha desses quadrados está ocupada pelo número $+1$ ou -1.

$+1$	$+1$	-1	-1
$+1$	-1	$+1$	-1
-1	$+1$	-1	$+1$
-1	-1	$+1$	$+1$

$+1$	-1	$+1$	$+1$
$+1$	$+1$	$+1$	-1
$+1$	$+1$	-1	$+1$
-1	$+1$	$+1$	$+1$

Durante a operação, também multiplicamos os números das casinhas. Ao obtermos $+1$ devemos colocar um $\times$ na casinha correspondente do hipercubo formado e ao obtermos -1 devemos colocar uma O. Prove que o jogo da velha quadridimensional representado dessa forma acaba em um empate, ou seja, em todos os alinhamentos que aparecem no hipercubo temos pelo menos um $\times$ e pelo menos uma O.