XLI OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (28 de outubro de 2017)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Bagagem de mão é aquela que pode ser levada junto ao passageiro durante a viagem. Nas companhias aéreas, há restrições em relação à massa e ao volume da bagagem de mão.

Segundo as novas regras da Agência Nacional de Aviação Civil, a ANAC, em vigor desde maio deste ano, a bagagem de mão pode ter massa de até 10 kg e suas dimensões máximas são estabelecidas por cada companhia aérea. Na tabela a seguir, apresentamos as condições sobre as massas e as medidas máximas permitidas em três companhias aéreas:

Companhia aérea	**Dimensões**	**Massa**
Amarelo	As três dimensões somadas devem ser, no máximo, 115 cm.	10 kg
Sabianca	No máximo 40 cm × 20 cm × 55 cm	10 kg
Escanteio	No máximo 40 cm × 25 cm × 55 cm	10 kg

A figura a seguir mostra como um passageiro da Escanteio pode verificar se sua bagagem de mão está dentro dos padrões permitidos.

a) O volume de uma mala no formato de um paralelepípedo reto-retângulo é o produto de suas três dimensões. Qual é o volume máximo, em cm^3, permitido pela Sabianca para a bagagem de mão?

b) Uma bagagem de mão da Amarelo pode ter volume maior do que o volume máximo de uma bagagem de mão da Escanteio. Apresente possíveis valores para as dimensões de uma bagagem de mão da Amarelo que tenha volume maior que o volume máximo permitido pela Escanteio.

c) A densidade do ouro é 19,3 g/cm^3, ou seja, em 1 cm^3 há 19,3 g de ouro. O passageiro que tentasse transportar o limite máximo de volume de uma mala de mão da Sabianca em ouro, estaria levando quantos quilogramas de ouro na mala?

d) Considerando que atualmente é permitido transportar no máximo 10 kg na bagagem de mão, quantas bagagens de mão seriam necessárias, no mínimo, para transportar a massa de ouro encontrada no item c?

PROBLEMA 2

Em 1865, o economista inglês William Stanley Jevons observou que avanços tecnológicos que aumentaram a eficiência no uso de carvão acompanharam o aumento do consumo de carvão na indústria. Esse fenômeno ficou conhecido como paradoxo de Jevons e afirma que o aumento na eficiência no uso de um recurso, reduzindo a quantidade necessária do recurso para qualquer uso, pode levar ao aumento no consumo total do recurso. Consideraremos nesse problema que *utilidade* é o valor monetário que indica o quanto uma pessoa valoriza algo.

Para ilustrar o fenômeno apresentado, suponha que na casa do Zé a iluminação da sala possa ser feita com uma lâmpada com utilidade de 10 reais por mês, ou seja, esse é o valor monetário que indica o quanto Zé valoriza a iluminação da sua sala com uma lâmpada, ou com duas lâmpadas com utilidade de 15 reais por mês. Sendo o custo de energia por lâmpada de 6 reais por mês, a sua utilidade mensal, dada pela diferença (utilidade de iluminação) – (custo com energia), é $10-(1\times 6)=4$ reais com uma lâmpada. E, da mesma forma, temos a utilidade mensal de $15-(2\times 6)=3$ reais usando duas lâmpadas. Comparando as duas situações, Zé nota que com uma lâmpada a utilidade mensal é maior. Por isso, ele opta por usar apenas uma lâmpada.

a) Após um avanço tecnológico, houve um aumento na eficiência do uso da energia e o custo com energia por lâmpada passou a ser apenas de 4 reais por mês. Considerando que as utilidades de iluminação são as mesmas, calcule a utilidade mensal para com uma lâmpada e com duas lâmpadas. Considerando a utilidade mensal, qual opção Zé deveria escolher?

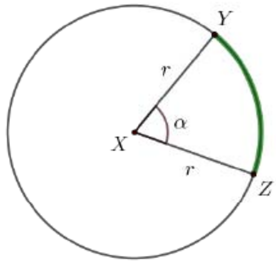
b) Considerando as maiores utilidades mensais já calculadas, qual foi o aumento percentual da maior utilidade mensal com custo de energia por lâmpada de 6 reais por mês para a maior utilidade mensal com custo de 4 reais por mês?

c) Suponha que haja apenas 1440 reais disponíveis para iluminar a sala de Zé. Depois disso, não haveria mais recursos para iluminar a sala de Zé. Considerando as duas situações, com custos de energia de 6 reais por mês por lâmpada e de 4 reais por mês por lâmpada, e que Zé escolha a opção dentre uma ou duas lâmpadas com maior utilidade mensal em cada caso, por quantos anos seria possível iluminar a sala do Zé em cada uma das duas situações?

PROBLEMA 3

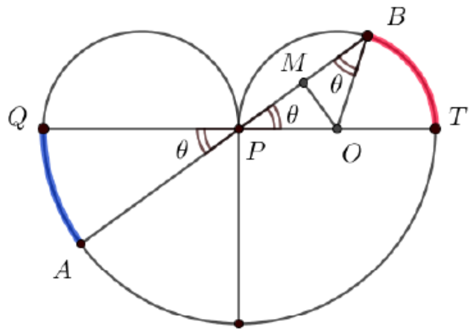
Uma das primeiras aparições do número π na história da Matemática foi como quociente entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. Nesse problema, vamos analisar alguns resultados interessantes usando o fato de que uma circunferência de raio r possui comprimento $2\pi \cdot r$.

A seguir, temos uma circunferência de centro X e raio r. Sabendo que o ângulo $\angle YXZ = \alpha$, podemos calcular o comprimento do arco $\widehat{YZ}$ usando o fato de que a medida do ângulo e o comprimento do arco são proporcionais, ou seja, $\widehat{YZ} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$ com o ângulo α em graus.



A figura a seguir, que parece um coração, é conhecida como cardioide de Boscovich, em homenagem ao matemático Roger Boscovich (1711 – 1787). Ela é formada por três semicircunferências, uma de centro P e diâmetro QT e outras duas de diâmetros QP e PT. Uma propriedade muito interessante é que qualquer reta passando por P divide o cardioide em duas figuras de mesmo perímetro.

Chamaremos de R o raio das semicircunferências menores.



Note que o raio da semicircunferência maior será $2R$. Usando o fato descrito anteriormente, o comprimento do arco $\widehat{QP}$ é $\frac{180°}{360°} \cdot 2\pi R = \pi R$.

a) Calcule os comprimentos das semicircunferências $\widehat{PT}$ e $\widehat{QT}$. Em seguida, verifique que a soma dos comprimentos dos arcos $\widehat{QP}$ e $\widehat{PT}$ é igual ao comprimento do arco $\widehat{QT}$.

b) Na figura, traçamos uma reta AB formando um ângulo θ com a reta QT. Sejam O o centro da circunferência de diâmetro PT e M o ponto médio do segmento PB. Mostre que $\angle OBM = \angle OPM = \theta$.

Você pode querer utilizar o fato de que se os lados correspondentes de dois triângulos possuem mesma medida, então os triângulos são congruentes e seus ângulos correspondentes possuem mesma medida.

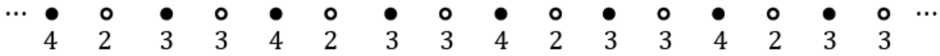
c) Calcule a medida do ângulo $\angle BOT$ em termos de θ.

d) Mostre que os comprimentos dos arcos $\widehat{AQ}$ e $\widehat{BT}$ são iguais e conclua que a soma dos arcos $\widehat{AQ} + \widehat{QP} + \widehat{PB}$ é igual a soma dos arcos $\widehat{BT} + \widehat{TA}$.

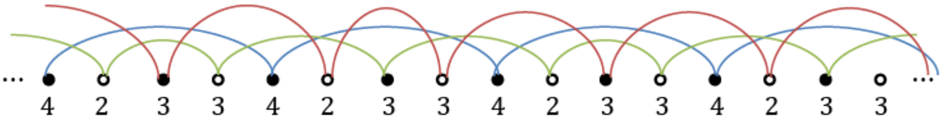
PROBLEMA 4

Chamamos de *padrão de malabarismo* uma sequência finita formada por números inteiros positivos. Por exemplo, $(4; 2; 3; 3)$ é um padrão de malabarismo. Por motivos práticos, não são interessantes padrões de malabarismos envolvendo números maiores do que 9, por isso, podemos escrever o padrão $(4; 2; 3; 3)$ na forma 4233 sem que ocorra dúvida na identificação.

O *diagrama de malabarismo* relativo a um padrão de malabarismo é desenhado inicialmente colocando-se pontos pretos e brancos alternadamente em uma reta. Então, escrevemos sob eles repetidamente o padrão de malabarismo que desejamos representar. Por exemplo, para o padrão 4233, temos:



Então, ligamos o ponto P_i, i inteiro, ao ponto que está exatamente s_i posições à sua direita, em que s_i é o termo do padrão de malabarismo que está embaixo do ponto P_i. Agora, as motivações desses nomes talvez possam fazer sentido. Os pontos brancos e pretos representam, respectivamente, a mão esquerda e a mão direita de um malabarista e o padrão de malabarismo indica a altura em que a bola está sendo lançada. Esse é o motivo de não ser muito razoável considerarmos padrões envolvendo números maiores do que 9.



Dizemos que um padrão de malabarismo é válido se em seu diagrama cada ponto P_i tem exatamente duas ligações (uma bola chega na mão correspondente naquele instante e é imediatamente lançada novamente).

Note que, com a observação anterior, cada padrão de malabarismo é formado por um conjunto de traços contínuos (*trajetórias*). Esses traços naturalmente são identificados com as bolas necessárias para efetuar o malabarismo em questão. Por exemplo, para realizar 4233 necessitamos de 3 bolas representadas pelo traço azul, traço verde e traço vermelho.

a) Desenhe o diagrama de malabarismo do padrão 441. Uma curiosidade: apesar da arte dos malabares ser milenar, esse desafio parece ter sido descoberto apenas após a criação da teoria que estamos apresentando.

b) Qual é o padrão de malabarismo do diagrama representado a seguir. Quantas bolas são utilizadas para realizá-lo?

c) Mostre que o padrão de malabarismo 135792468 não é válido.

d) Apresente um padrão de malabarismo válido usando cada um dos números inteiros de 1 a 9 exatamente uma vez. Determine quantas bolas são necessárias para um malabarista realizar esse padrão.

PROBLEMA 5

Considere a sequência em que o seu n-ésimo termo tem n dígitos e ao colocarmos os seus termos justapostos (isto é, um ao lado do outro) obtemos:

$$123456789123456789123456789123456789123456789123456789123456789123456789\ldots$$

Ou seja, os termos iniciais da sequência são:

$$1, 23, 456, 7891, 23456, 789123, 4567891, 23456789, 123456789, 1234567891, 23456789123, \ldots$$

Essa sequência é chamada *sequência desconstrutiva de Smarandache*. Floretin Smarandache é um matemático e filósofo romeno, que atualmente trabalha na Universidade do Novo México nos EUA.

a) Os onze primeiros termos dessa sequência foram apresentados anteriormente. Qual é o 12º termo da sequência?

Observe que o segundo termo da sequência, 23, tem como primeiro dígito 2 e último dígito 3 e o décimo primeiro termo, 23456789123, também. De fato, considerando que o primeiro termo da sequência, 1, tem como primeiro e último dígitos o 1, temos que essa coincidência ocorre também com o primeiro e o décimo termo, 1234567891. Ou seja, parece que a cada nove termos, o primeiro e o último dígitos coincidem. Vamos provar isso nos próximos itens.

Imaginando os termos da sequência justapostos, ou seja,

$$1\_23\_456\_7891\_23456\_789123\_4567891\_23456789\_123456789\_1234567891\_23456789123\_\ldots$$

vemos que a diferença entre as posições ocupadas pelo primeiro dígito do segundo termo e o primeiro dígito do décimo primeiro termo é $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 54$. Entre os últimos dígitos, é $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 63$.

b) Considere agora o termo que ocupa a posição n e o que ocupa a posição $n + 9$, n inteiro positivo. Qual é a diferença entre posições ocupadas pelos primeiros dígitos desses termos? Qual é a diferença entre as posições ocupadas pelos últimos dígitos? Por que podemos afirmar que esses pares de dígitos sempre irão coincidir?

c) Há um múltiplo de 5 entre os termos dessa sequência?

d) Demonstre que há infinitos múltiplos de 128 na sequência desconstrutiva de Smarandache, mas não há um múltiplo de 256.
Nesse item, você pode querer utilizar o seguinte fato: um número inteiro é divisível por 2^k se, e somente se, o número formado pelos seus k últimos dígitos é divisível por 2^k. Por exemplo, um número é divisível por $8 = 2^3$ se, e somente se, seus 3 últimos dígitos formam um múltiplo de 8.

R A S C U N H O

Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.