XL OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (19 de novembro de 2016)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Na década de 1970, iniciou-se no futebol inglês uma regra que vigora até os dias de hoje praticamente no mundo inteiro: a vitória passou a valer três pontos. A tese era de que com essa regra os times buscariam mais as vitórias, tornando assim as partidas mais disputadas e mais emocionantes para os torcedores, e que geraria mais gols.

É fato que houve um aumento no número de vitórias e também um aumento no número de vitórias por um gol de diferença. Assim, os gols não se tornaram mais abundantes, mas se tornaram mais decisivos e valiosos.

Os times passaram então a analisar seus resultados e calcular quantos pontos, em média, são conquistados por partida em relação ao número de gols marcados na partida. A primeira coisa a se perceber é que um único gol marcado garante, praticamente, um ponto (empate); dois gols deixam o time mais perto da vitória do que do empate; três ou quatro gols aproximam o time mais ainda da vitória, embora não seja garantida; marcar cinco ou mais gols garante, na imensa maioria das vezes, a vitória.

Dessa forma, os especialistas em futebol passaram a perceber que simplesmente somar os gols de um atacante não é a melhor maneira de avaliar a sua produtividade. Gols decisivos, aqueles que podem ser convertidos em vitórias e mais pontos, valem mais do que o terceiro e quarto gols, quando a vitória já está praticamente consumada. E mais, conseguiram modelar essa situação, chegando à conclusão de quantos pontos cada gol gera, em média, em uma determinada partida:

Primeiro gol do time	0,8 ponto
Segundo gol do time	1,0 ponto
Terceiro gol do time	0,6 ponto
Quarto gol do time	0,2 ponto
Quinto gol do time	0,1 ponto

Assim, percebemos que nem todo gol vale a mesma coisa, e que o segundo gol de um time é o mais valioso. Logo, além do total de gols marcados por um jogador, vale a pena calcular o total de pontos gerados pelos gols marcados.

a) Considere os dados de três grandes artilheiros da Série B do Brasileirão 2016 (até a 36ª rodada).

Jogador	Clube	Quantidade de primeiros gols	Quantidade de segundos gols	Quantidade de terceiros gols	Quantidade de quartos gols
Bill Lepo Lepo	Ceará	6	6	2	0
Nenê	Vasco	7	3	2	1
Felipe Garcia	Brasil de Pelotas	9	4	0	0

Veja que Bill Lepo Lepo marcou 14 gols e gerou $6 \times 0{,}8 + 6 \times 1{,}0 + 2 \times 0{,}6 = 12$ pontos. Calcule o número de gols e pontos gerados por Nenê e Felipe Garcia.

b) Analisando o campeonato inglês da temporada 2009/2010, veja como alguns atacantes contribuíram para a pontuação de seus times no campeonato.

Jogador	Número de gols	Pontos gerados
Wayne Rooney	26	20,6
Louis Saha	13	11,3
Cesc Fábregas	15	10,6
Dirk Kuyt	19	7,9

Denominamos *produtividade* o quociente $\frac{\text{Pontos gerados}}{\text{Número de gols}}$. Calcule a produtividade os quatro jogadores acima e coloque-os em ordem crescente de produtividade.

c) Explique por que podemos afirmar que Louis Saha marcou o segundo gol de sua equipe em alguma partida.

PROBLEMA 2

Nesse problema iremos apresentar um truque de cartas e a Matemática por trás dele. Vamos lá! Iremos precisar de um baralho com 52 cartas: 4 naipes (Ouro, Copas, Espadas e Paus) com 13 cartas cada um (Ás = 1; 2, 3, ..., 10, Valete = 11, Dama = 12, Rei = 13).

Coloque as cartas abertas (valor da carta visível) sobre a mesa, uma a uma, formando várias pilhas respeitando a seguinte regra: ao começar uma nova pilha, veja o valor da primeira carta e, partindo desse valor, conte (silenciosamente) até 13 acrescentando a cada número contado uma carta na pilha.

Por exemplo, se a primeira carta é um 8, você conta 8, 9, 10, 11, 12, 13 montando uma pilha com seis cartas. Normalmente você irá conseguir montar 5 ou 6 pilhas e irão restar poucas cartas. De fato, não importa quantas pilhas você monte desde que cada uma delas esteja "completa" (contada até 13). As cartas que sobram não fazem parte do truque.

Na figura A a seguir, temos 5 pilhas feitas: os valores das cartas iniciais são, respectivamente, 7, Valete = 11, Ás = 1, 9 e Rei = 13. Os números de cartas por pilha são, respectivamente, 7, 3, 13, 5 e 1. Como $7 + 3 + 13 + 5 + 1 = 29$, estão sobrando 23 cartas que não entrarão no truque. Poderíamos ter montado pelo menos mais uma pilha.

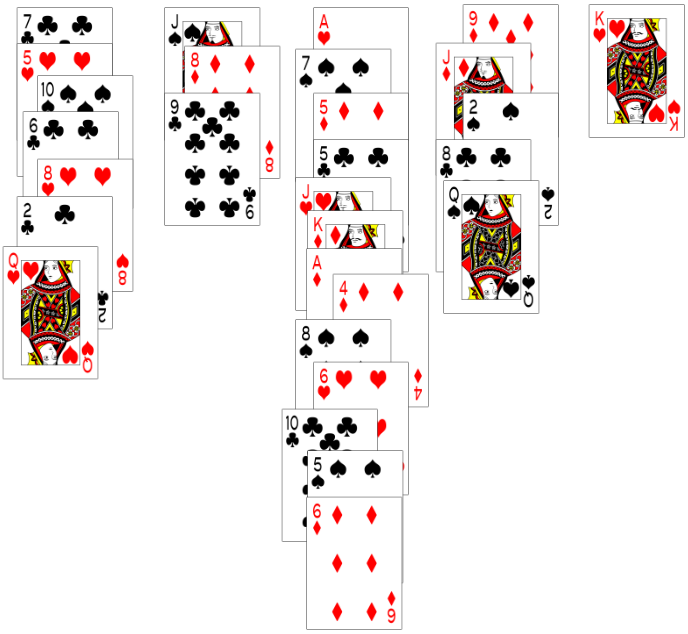


Figura A

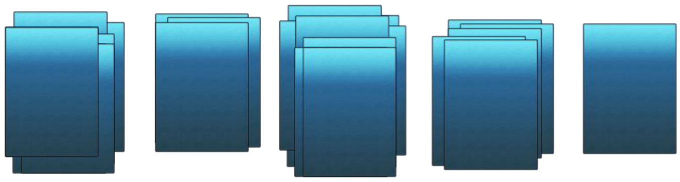


Figura B

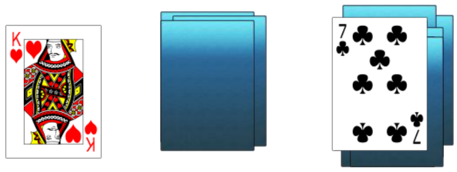


Figura C

O próximo passo do truque é chamar um espectador para virar as pilhas de ponta-cabeça e permitir que mude a ordem das pilhas à vontade (figura B). Então peça para ele devolver as pilhas para você exceto três pilhas. Para aumentar o efeito do truque, faça esse passo com os olhos fechados. Essas cartas devolvidas, você pode colocar no monte das cartas não utilizadas no truque. Para finalizar, você deve pedir para o espectador mostrar a carta do topo de duas das três pilhas restantes. Na figura C, as cartas mostradas são o Rei = 13 e o 7.

Agora a conclusão do truque! Você soma – mentalmente! – o número de cartas não utilizadas com os totais de cartas nas pilhas devolvidas, 13 e 5, nesse exemplo, obtendo 41. Subtrai, agora, dos valores mostrados nas duas pilhas que ainda estão mesa, 13 e 7, obtendo 21. Para fechar é só subtrair 10 (esse valor, na subtração final, é fixo), obtendo 11. A carta no topo da última pilha é um valete! É claro que você deve colocar um bocado de suspense nesse final!

Como explicar o mistério? É o que faremos nos itens abaixo.

a) Sendo a o valor da primeira carta de uma pilha, quantas cartas terá a pilha?

b) Sendo a, b, c, d, e os valores das primeiras cartas de cada uma das 5 pilhas formadas, quantas cartas não serão utilizadas no truque? Suponha que seja possível formar as 5 pilhas.

c) Novamente, sendo a, b, c, d, e os valores das primeiras cartas de cada uma das 5 pilhas formadas, suponha que foram devolvidas as pilhas iniciadas por a e b, ou seja, as pilhas iniciadas por c, d e e ficaram na mesa. Considere também que o espectador virou as cartas c e d das três pilhas que ficaram na mesa. Explique como é possível, utilizando os passos indicados no truque, concluir que a carta sobre a última pilha é a e.

PROBLEMA 3
Seja $x_1 = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos, uma fração irredutível. Considere a sequência em que o termo inicial é x_1 e, sendo x um termo da sequência, para obter o próximo termo, temos a seguinte regra: se a é ímpar, o próximo termo é $\frac{3x+1}{2}$; se a é par, o próximo termo é $\frac{x}{2}$.

Por exemplo, sendo $x_1 = \frac{5}{7}$, temos $a = 5$ e $b = 7$. Logo, como a é ímpar, o próximo termo é $x_2 = \frac{3x_1+1}{2} = \frac{3 \cdot \frac{5}{7}+1}{2} = \frac{11}{7}$ e, continuando, $x_3 = \frac{3x_2+1}{2} = \frac{3 \cdot \frac{11}{7}+1}{2} = \frac{20}{7}$. Agora, temos, $a = 20$ e $b = 7$, e, portanto, como a é par, $x_4 = \frac{x_3}{2} = \frac{10}{7}$. Obtendo o próximo termo, $x_5 = \frac{x_4}{2} = \frac{5}{7}$. Observe que o quinto termo x_5 é igual ao primeiro x_1.

a) Continuando a sequência acima, podemos afirmar que $x_1 = x_{2017}$? Por quê?
b) Considere uma nova sequência que obedeça as mesmas regras, mas para a qual $x_1 = \frac{23}{37}$. Calcule x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 e x_7. (Dica: Se você não errar nenhuma conta, verificará que x_7 será igual a x_1.)
c) Suponha que, para uma outra sequência $x_2 = \frac{3x_1+1}{2}$, $x_3 = \frac{x_2}{2}$ e $x_4 = \frac{x_3}{2}$. Considere ainda que $x_4 = x_1$. Calcule, para essa sequência, o valor de x_1 e o valor de x_{2016}.

PROBLEMA 4
Mathijs Coster - Editor da revista holandesa de Matemática *Pythagoras* – definiu, para um concurso da revista em 2006, um conjunto especial de números que denominaremos *números de Coster*: um número de Coster é um número que você pode obter com as quatro operações $(+, -, \times, /)$ utilizando cada um de seus dígitos exatamente duas vezes. É permitido usar parênteses, mas não é permitido justapor dígitos, por exemplo, com 1 e 2 não podemos formar 12.
Alguns exemplos de números de Coster:

$$1 = 1 \times 1;$$
$$25 = 5 \times 5 + 2 - 2;$$
$$193 = 1 + (9 - 1) \times (9 \times 3 - 3);$$
$$256 = (2 \times 5 + 6) \times (2 \times 5 + 6);$$
$$127.750 = 5 \times 5 \times 7 \times 2 \times (7 \times (7 \times 7 + 2 + 1) + 1) + 0 + 0$$

a) Mostre que 36, 145 e 196 são números de Coster.
b) Nesse último item vamos demostrar que existem infinitos números de Coster. Considere as igualdades a seguir:

$$45 = (4 + 4) \times 5 + 5;$$
$$4545 = 5 \times (4 + 5) \times (4 \times 5 \times 5 + 4/4);$$
$$454545 = 5 \times (4 + 5) \times ((4 \times 4 \times 5 \times 5 + 4) \times 5 \times 5 + 4/4);$$

Demostre que o número de 8 dígitos 45454545 é um número de Coster.

PROBLEMA 5
Napoleão Bonaparte (1769 - 1821) é uma figura histórica muito importante. Ele foi um líder político e militar da França de 1804 até 1815. Nessa questão iremos conhecer uma contribuição de Napoleão para a Matemática.

Vamos mostrar que é possível cobrir o plano com os Triângulos de Napoleão. Ao cobrir o plano, devemos usar cópias de certas figuras sem sobreposição (ou seja, sem colocar uma figura sobre a outra) e sem deixar buracos. Para isso, duas condições são essenciais: segmentos encostados devem ter mesmo comprimento e os ângulos ao redor de cada ponto devem somar exatamente $360°$. Por exemplo, é possível cobrir o plano com hexágonos regulares de mesmo lado, conforme a figura 1. Por outro lado, não é possível cobrir com pentágonos regulares, pois os ângulos internos do pentágono regular são iguais a $108°$ (observe a figura 2) e não é possível obter soma $360°$.

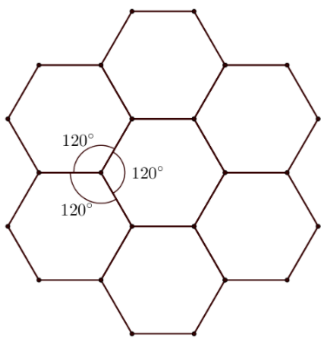


Figura 1

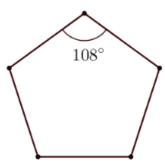


Figura 2

Os Triângulos de Napoleão são formados quando tomamos um triângulo ABC e construímos triângulos equiláteros ABD, BCE e CAF externamente sobre seus lados. Vamos numerar os triângulos ABC, ABD, BCE e CAF com os números 1, 2, 3 e 4, respectivamente, conforme a figura 3 a seguir.

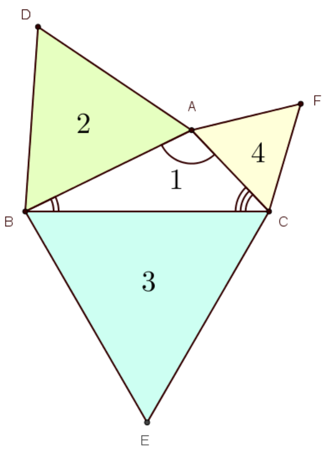


Figura 3

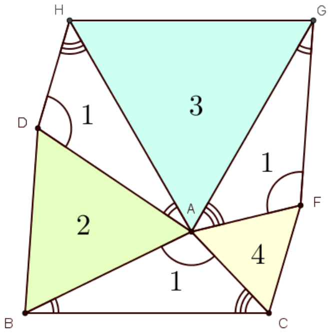
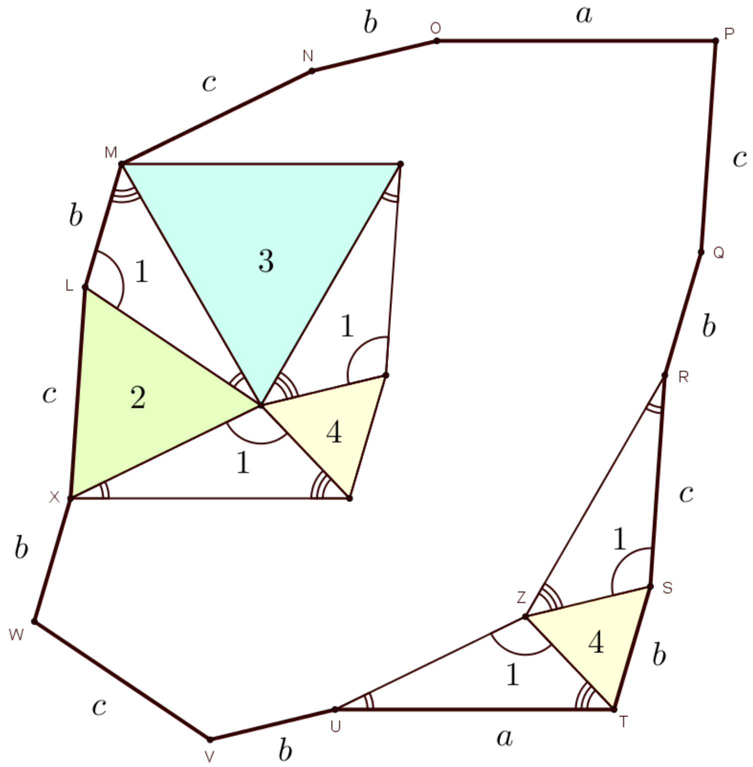


Figura 4

Suponha que ABC possui ângulos internos $m(C\hat{A}B) = \hat{A} = 110°$, $m(A\hat{B}C) = \hat{B} = 30°$ e $m(B\hat{C}A) = \hat{C} = 40°$ e lados de comprimento $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$.
a) Considere a figura 4 acima, explique por que a soma dos ângulos ao redor do ponto A é $360°$.

A figura a seguir é um tridecágono $LMNOPQRSTUVWX$ (polígono de 13 lados). Os comprimentos dos lados estão marcados na figura e os ângulos internos são

$m(L\hat{M}N) = \hat{B} + \hat{C} + 60° = 130°$	$m(P\hat{Q}R) = \hat{A} + 60° = 170°$	$m(T\hat{U}V) = \hat{A} + \hat{B} + 60° = 200°$
$m(M\hat{N}O) = \hat{A} + 60° = 170°$	$m(Q\hat{R}S) = \hat{B} + \hat{C} + 120° = 190°$	$m(U\hat{V}W) = \hat{B} + \hat{C} + 60° = 130°$
$m(N\hat{O}P) = \hat{C} + 120° = 160°$	$m(R\hat{S}T) = \hat{A} + 60° = 170°$	$m(V\hat{W}X) = \hat{A} = 110°$
$m(O\hat{P}Q) = \hat{B} + 60° = 90°$	$m(S\hat{T}U) = \hat{C} + 60° = 100°$	$m(W\hat{X}L) = \hat{B} + \hat{C} + 120° = 190°$



Vamos provar que podemos cobrir essa figura com os Triângulos de Napoleão. Já colocamos cinco triângulos 1, um triângulo 2, um triângulo 3 e dois triângulos 4.
b) Determine a medida do ângulo $X\hat{L}M$.
c) Considerando os triângulos SRZ e ZUT de número 1 e o triângulo STZ de número 4. Determine as medidas dos ângulos $Q\hat{R}Z$, $R\hat{Z}U$ e $Z\hat{U}V$.
d) Complete a cobertura do tridecágono $LMNOPQRSTUVWX$ na folha de respostas usando mais algumas cópias dos Triângulos de Napoleão e justifique por que é possível cobrir o plano. Não esqueça de colocar os números identificando cada triângulo. De preferência, use régua, mas não é necessário se preocupar com a precisão da figura.