XXXIX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (7 de novembro de 2015)

Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 4h. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Uma das sequências mais famosas do mundo é a *sequência de Fibonacci*. Os dois primeiros termos são $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Para obter o terceiro termo você deve somar o segundo e o primeiro termos, ou seja, $F_3 = 1 + 1 = 2$. Para obter o quarto termo somam-se o terceiro e o segundo termos, realizando a operação $F_4 = 2 + 1 = 3$. E assim por diante. Desse modo, os dez primeiros termos da sequência de Fibonacci são descritos a seguir.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Sequências que começam com dois termos inteiros positivos e cada termo é a soma dos dois anteriores são conhecidas como *sequências Gibonacci*. Vamos usar a notação G_n para representar o termo na posição n de uma sequência Gibonacci. Por exemplo, se começarmos com $G_1 = 15$ e $G_2 = 11$, teremos a seguinte sequência Gibonacci.

$$15, 11, 26, 37, 63, 100, 163, 263, 426, 689, \ldots$$

Note que, para essa sequência, temos $G_7 = 163$.

Vale lembrar que a sequência de Fibonacci é também uma sequência Gibonacci, basta considerar $G_1 = 1$ e $G_2 = 1$.

a) Determine termos iniciais G_1 e G_2 de uma sequência Gibonacci de modo que $G_7 = 26$. Mostre que esses são os únicos valores possíveis.

b) Sejam q e r inteiros positivos. Uma sequência Gibonacci foi construída de modo que $G_6 = 8q$ e $G_7 = 13q + r$. Determine, em função de q e r, os termos G_1 e G_2.

c) Determine termos iniciais G_1 e G_2 de uma sequência Gibonacci de modo que $G_7 = 2016$.

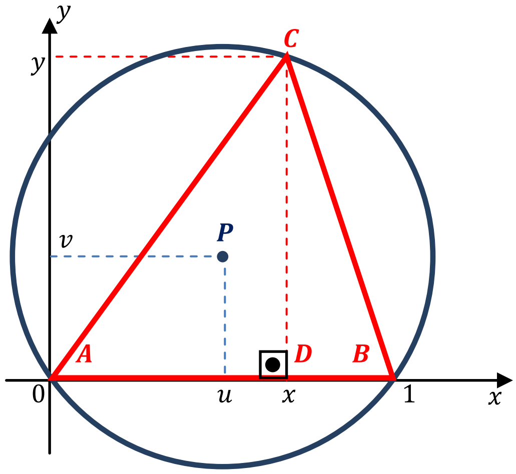
PROBLEMA 2

Nesse problema iremos apresentar algumas ideias e fatos da *Geometria Algébrica*, uma das áreas mais importantes da pesquisa Matemática na atualidade. Depois da prova, vocês poderão impressionar (ou assustar?) familiares e amigos com esses novos conhecimentos!

Consideramos o seguinte teorema de Geometria Plana, o qual iremos demonstrar com métodos da Geometria Algébrica:

O produto de dois lados de um triângulo é igual ao produto da altura relativa ao terceiro lado pelo diâmetro da circunferência circunscrita.

Para começar vamos dar uma formulação algébrica para o problema. Para tal utilizaremos que a distância entre os pontos de coordenadas $(x_{1,}, y_1)$ e (x_2, y_2) é $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Pode-se observar que esse resultado é uma consequência imediata do Teorema de Pitágoras.



Sendo ABC o triângulo e P o centro de sua circunferência circunscrita. Podemos supor, sem perda da generalidade, que as coordenadas dos pontos são $A = (0;0)$, $B = (1;0)$, $C = (x;y)$ e $P = (u;v)$.

O fato de P ser o centro de uma circuferência que contém os pontos A, B e C pode ser equacionado a partir de que $PA = PB = PC$. Com efeito:

$$PA = PB \Leftrightarrow \sqrt{(u-0)^2+(v-0)^2} = \sqrt{(u-1)^2+(v-0)^2} \Leftrightarrow 2u-1=0$$

Ou seja, sendo o polinômio h_1 tal que $h_1 = u - \frac{1}{2}$, temos que $PA = PB$ se, e somente se, $h_1 = 0$.

a) Encontre um polinômio h_2 (possivelmente nas variáveis x, y, u e v) tal que $PA = PC \Leftrightarrow h_2 = 0$.

b) Sendo R o raio da circunferência circunscrita, o teorema que desejamos demonstrar afirma que $AC \cdot BC = CD \cdot 2R$. Encontre um polinômio t tal que $AC \cdot BC = CD \cdot 2R \Leftrightarrow t = 0$.

Assim, pelos fatos verificados anteriormente, provar o teorema significa verificar que $\left|\begin{array}{l} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow t = 0$, ou seja, devemos provar que o conjunto das soluções do sistema de equações apresentado (nas variáveis x, y, u e v) contém as soluções da equação $t = 0$. Essa bela ideia está na essência de alguns métodos fundamentais da Geometria Algébrica.
Para concluir a demonstração, dois conceitos irão ajudar:

$\mathbb{Q}[x,y,u,v]$ - *anel dos polinômios nas variáveis x, y, u e v, com coeficientes racionais.*
Conjunto dos polinômios p que podem ser escritos como soma de parcelas, ou termos, da forma

$$c_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4} x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} u^{\alpha_3} v^{\alpha_4}$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ são números naturais e $c_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4} \in \mathbb{Q}$. Vale a pena observar que para escrever tal soma adotaremos a *ordem lexicográfica*. Isto significa que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) > (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ se, e somente se: $\alpha_1 > \beta_1$ ou, para algum $1 \le k \le 4$, temos que $\alpha_i = \beta_i$ para $1 \le i < k$, porém $\alpha_k > \beta_k$. Assim, um polinômio p composto pelos monômios x^4yu^2, $2x^4yv^2$ e $-x^5uv$ será apresentado como $p = -x^5uv + x^4yu^2 + 2x^4yv^2$.

Ideal I do anel $\mathbb{Q}[x,y,u,v]$
Um ideal I de $\mathbb{Q}[x,y,u,v]$ é um subconjunto de $\mathbb{Q}[x,y,u,v]$ que satisfaz todas as seguintes propriedades:
i) $0 \in I$
ii) Se $a, b \in I$, então $a + b \in I$
iii) Se $a, b \in I$, então $a \cdot b \in I$
(Podemos observar que o conceito de Ideal generaliza a ideia de conjunto de múltiplos.)

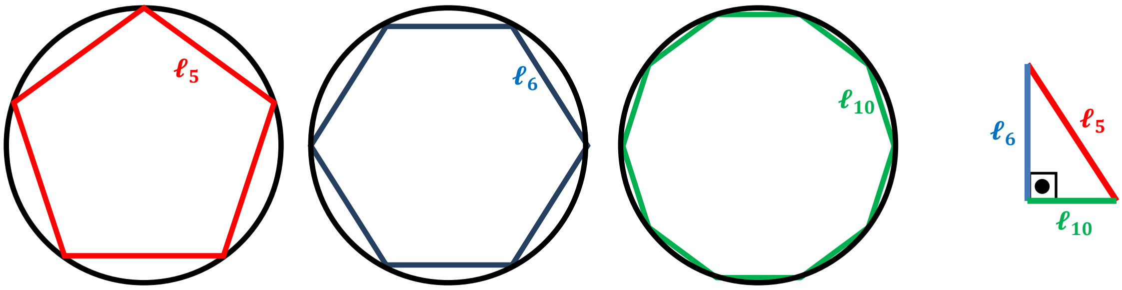
c) Considere o conjunto de polinômios $P \subset \mathbb{Q}[x,y,u,v]$ tal que $p \in P$ se, e somente se $\left|\begin{array}{l} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow p = 0$. Prove que P é um ideal de $\mathbb{Q}[x,y,u,v]$.

Com o resultado demonstrado no item c, basta provarmos que $t \in P$. Faremos isso com divisões sucessivas!

d) Elimine a variável u de h_2 obtendo um polinômio $\hat{h}_2$, que não dependa de u, tal que $\left|\begin{array}{l} h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} h_1 = 0 \\ \hat{h}_2 = 0 \end{array}\right.$. Então, divida t por $\hat{h}_2$ e depois divida o resto por h_1. Utilize a ordem lexicográfica para efetuar tais divisões.
Observe que o resto dessa segunda divisão é zero e conclua que $t \in P$, demonstrando o teorema inicial (observe que isso poderia – e é – feito mais rapidamente por um computador!).

PROBLEMA 3

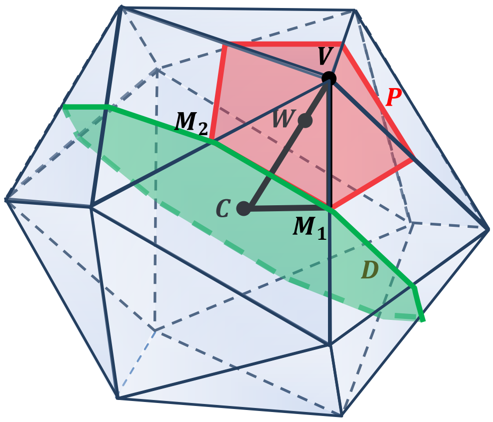
Nesse problema, mostraremos, com o auxílio da geometria espacial, a *identidade pentágono-hexágono-decágono*, que diz que, sendo ℓ_n o lado do n-ágono regular inscrito em um círculo de raio 1, então $\ell_5^2 = \ell_{10}^2 + \ell_6^2$.



a) Seja ABC um triângulo retângulo em A, sendo AH a altura relativa à hipotenusa. Prove que

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

b) Na figura a seguir, temos um icosaedro regular (cujas faces são triângulos equiláteros) de centro C. Construímos, ligando pontos médios de arestas, um pentágono regular P e um decágono regular D.



Sendo $M_1M_2 = \ell_6$, calcule, em função de ℓ_5, ℓ_6 e ℓ_{10}, os raios dos círculos circunscritos ao pentágono P e ao decágono D.

c) Sejam V um vértice e W o centro de P. Mostre que as retas WM_1 e CV são perpendiculares.

d) Utilizando o icosaedro, prove a identidade pentágono-hexágono-decágono, ou seja, sem usar trigonometria, demonstre que $\ell_5^2 = \ell_{10}^2 + \ell_6^2$.

PROBLEMA 4

Nesse problema discutiremos a *Desigualdade de Bell*, apresentada em um artigo publicado em 1964 pelo físico irlandês John Stewart Bell (1928-1990). Um resultado tão importante para a consolidação da Mecânica Quântica que permitiu que o importante pesquisador Noson Yanofsky afirmasse: "Esse resultado demonstra que a superposição é um fato do universo e aquela nossa noção de espaço precisa ser ajustada." A versão que apresentaremos não é a o do artigo original de Bell, mas uma variação devida a Bernard d'Espagnat.

Inicialmente, vamos precisar de uma desigualdade de probabilidades. Lembre-se que $\bar{X}$ é o complementar do conjunto X, isto é, sendo S o universo, $\bar{X} = S - X$.

a) Sejam A, B e C eventos de um Espaço Amostral S. Prove que $p(A \cap \bar{C}) = p(A \cap \bar{C} \cap B) + p(A \cap \bar{C} \cap \bar{B})$ e conclua que $p(A \cap \bar{C}) \le p(\bar{C} \cap B) + p(A \cap \bar{B})$.

Agora é a hora da Mecânica Quântica! Suponha que as partículas P_1 e P_2 estão emaranhadas (o que é isso? Você não vai precisar saber agora, mas vale a pena pesquisar!). A Mecânica Quântica diz que, se medirmos os seus spins, a probabilidade de termos o mesmo resultado (digamos, cima-cima ou baixo-baixo) é dada por $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}$, em que φ é o ângulo entre as medidas.

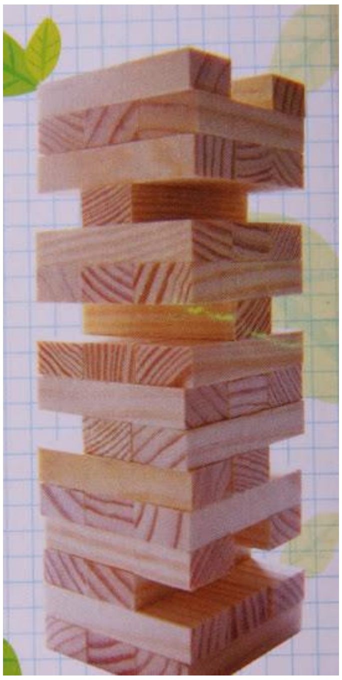
b) O que ocorre com os spins das partículas se $\varphi = 0$? (Esse é o principal significado de elas estarem emaranhadas e tal fato não depende da distância entre elas! Estranho!!)

Considere os eventos:
A – o spin da partícula P_1 medido em $0°$ é cima.
B – o spin da partícula P_1 medido em $45°$ é cima.
C – o spin da partícula P_1 medido em $90°$ é cima.
O *Princípio da Incerteza de Heisenberg* mostra que é impossível determinarmos os spins de P_1 em duas direções (ângulos) diferentes. Porém podemos aproveitar o emaranhamento entre P_1 e P_2 e calcular, por exemplo, $p(A \cap \bar{C})$.

c) Explique por que $\overline{C}$ é equivalente ao spin da partícula P_2 medido em $90°$ ser cima e calcule $p(A \cap \bar{C})$.

d) Mostre que $p(A \cap \bar{C}) > p(\bar{C} \cap B) + p(A \cap \bar{B})$. (Não pense no significado disso agora. Sua cabeça pode explodir!)

PROBLEMA 5



Jenga é um jogo de bloquinhos muito famoso. São usados $3n$ bloquinhos de madeira, cada um com dimensões $3 \times 1 \times 1$. Na versão mais conhecida do jogo, usa-se $n = 18$. Monta-se uma torre com dimensões $3 \times 3 \times n$. Cada camada da torre consiste inicialmente de três bloquinhos em posição perpendicular aos bloquinhos da camada imediatamente abaixo. Uma camada é dita *cheia* quando contém todos os seus três bloquinhos. Duas pessoas jogam alternadamente. Cada jogador, em sua vez, deve remover um bloquinho de qualquer camada abaixo da camada cheia mais alta e colocá-lo no topo da torre, em posição perpendicular aos bloquinhos da camada cheia mais alta. O bloquinho colocado não pode iniciar uma nova camada a não ser que a camada do topo fique cheia. O jogador que derrubar a torre perde o jogo.

Em um jogo real, quando um jogador tenta retirar um bloquinho e colocá-lo no topo ele acaba alterando levemente as posições dos bloquinhos adjacentes. Neste problema, vamos considerar que o jogador realiza o movimento perfeitamente sem alterar a posição dos blocos adjacentes.

Vamos caracterizar uma torre de altura k que se mantém estável por uma k-upla $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, onde $a_i = a_{i1}a_{i2}a_{i3} \in \{111, 110, 101, 010\}$, para $1 \leq i < k$. Se $a_{ij} = 1$ então existe um bloquinho na posição j da camada i; não faremos distinção entre 110 e 011, e 100 e 001 fazem com que a torre caia. No exemplo ao lado, temos a torre

$$(111,111,110,101,111,110,110,111,111,010,111,111,010,111,111,101).$$

No início do jogo, temos $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 111$. Veja que uma torre obtida após jogadas válidas terá $a_{k-1} = 111$ ou $a_k = 111$.

Há apenas três tipos de movimentos:

- $M101$ – ao remover o bloquinho central de um camada tipo 111.
- $M110$ – ao remover um bloquinho lateral de um camada tipo 111.
- $M010$ – ao remover o bloquinho lateral que sobrou em uma camada tipo 110.

Vale ressaltar que jogadores não poderão jogar nas camadas 101 e 010, pois a torre desmoronaria. Vamos caracterizar cada posição do jogo por uma tripla (x, y, z), onde x e y são inteiros não negativos e $z \in \{0,1,2\}$ tais que:

- x – número de camadas do tipo 111 abaixo da camada cheia mais alta.
- y – número de camadas do tipo 110 abaixo da camada cheia mais alta.
- z – número de bloquinhos acima da camada cheia mais alta.

Veja que ao fazer um movimento tipo $M101$ a posição do jogo vai de (x, y, z) para $(x - 1, y, z + 1)$, para $z = 0$ ou $z = 1$ e de $(x, y, 2)$ para $(x, y, 0)$, quando $z = 2$.

a) Para cada um dos outros dois tipos de movimentos, $M110$ e $M010$, determine a variação da posição (x, y, z) resultante.

Seja $v(x, y, z)$ o *valor* da posição (x, y, z), onde o valor da posição é 1 se o primeiro jogador pode forçar sua vitória partindo dessa posição e 0 caso contrário. É possível montar uma recorrência para o valor de cada posição. Por exemplo, se $x > 0$, $y = 0$ e $z = 0$ ou $z = 1$, tem-se

$$v(x, y, z) = 1 - \min\{v(x - 1, 0, z + 1), v(x - 1, 1, z + 1)\},$$

e se $x > 0$, $y = 0$ e $z = 2$, tem-se

$$v(x, y, z) = 1 - \min\{v(x, 0, 0), v(x, 1, 0)\}.$$

b) Em uma posição em que $x > 0$ e $y > 0$, determine equações de recorrência para o valor dessa posição.

Considere as matrizes

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nós chamaremos de $a(x, y, z)$, onde $x, y, z \in \{0,1,2\}$, a posição $(x + 1, y + 1)$ da matriz A_z, ou seja, $a(x, y, z) = (a_z)_{x+1,y+1}$. Por exemplo, $a(0,1,2) = 0$ enquanto $a(2,1,0) = 1$.

Sendo n mód 3 o resto da divisão de n por 3, pode-se provar que

$$v(x, y, z) = \begin{cases} a(x \text{ mód } 3, y \text{ mód } 3, z), \text{se } x > 0 \text{ ou } z > 0 \\ 1, \text{se } x = z = 0 \text{ e } y \text{ mód } 3 = 1 \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

c) Wesley Jengadão recebeu a posição dada na torre apresentada na questão. Qual é o valor dessa posição?

d) Das jogadas permitidas nessa situação, se existirem, determine qual tipo de movimento Wesley Jengadão deve fazer (não é rebolar com a Banda Garota Jengada!) para garantir sua vitória. Justifique sua resposta usando os valores de cada posição.