XXXVIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (1º de novembro de 2014)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Claude Shannon criou a *Teoria da Informação* para medir a quantidade de informação em uma mensagem. Um dos conceitos mais celebrados da Teoria da Informação é o de *entropia*, que mede exatamente essa quantidade de informação. Por exemplo, a Língua Inglesa tem entropia de cerca de 1,1 bit por caractere. Vamos supor que essa entropia seja a mesma para a Língua Portuguesa.

Como um caractere é um byte, que corresponde a 8 bits, um arquivo .txt com um texto em Português é tipicamente compactado pelos melhores algoritmos para $1{,}1/8$ de seu tamanho.

a) Considerando um *tweet* como uma sequência de 140 caracteres, cada um dos quais tendo 256 possibilidades (letras, números, símbolos etc), encontre a ordem de grandeza da quantidade M de tweets que podem ser feitos, ou seja, n tal que $10^{n-1} \le M < 10^n$.

b) A grande maioria dos tweets do item a não têm significado. Uma aplicação de entropia é calcular a quantidade de tweets que fazem algum sentido em Português. Ele pode ser estimado por 2 elevado à entropia total, que é 140 vezes a entropia por caractere. Estime a ordem de grandeza da quantidade de tweets que fazem algum sentido em Português.

Você pode querer usar: $\log_{10} 2 = 0{,}301$.

PROBLEMA 2

Os sistemas de sorteio das principais loterias do mundo são bastante similares. Em geral, sorteiam-se m números de um conjunto $\{1, 2, .., n\}$ em que, é claro, $n > m$. É usual chamar uma loteria com tais características de *loteria* m/n. A nossa *Mega-Sena*, por exemplo, é uma loteria $6/60$.

Algumas outras loterias importantes adotam pequenas variações. Na *Mega Millions* – loteria norte-americana que em março de 2012 pagou o maior prêmio da história, 656 milhões de dólares – são sorteados 5 números de um total de 75 e 1 número extra de um conjunto de 15 (a chamada *Mega Ball*). Dizemos que ela é uma loteria $5/75$ e $1/15$.

a) Calcule o número de resultados possíveis da loteria Mega Millions. *Você não precisa fazer as contas nesse item, basta deixar a resposta indicada.*

O número que você obteve no item a é gigantesco. Assim, os fatos que serão narrados a seguir poderão parecer surpreendentes.

A *Sport Toto*, loteria $6/49$ realizada pelo governo da Bulgária, teve os mesmos seis números $(4, 15, 23, 24, 35, 42)$ sorteados nos concursos de 6 e 10 de setembro de 2009. O Ministro dos Esportes, Svilen Neikov, ordenou uma investigação.

A Mifal HaPays, loteria $6/37$ e $1/7$ realizada pelo governo de Israel, teve os mesmos seis números $(13, 14, 26, 32, 33, 36)$ sorteados em 21 de setembro e 16 de outubro do mesmo ano de 2010. As pessoas ligaram em massa para as rádios locais reclamando que havia trapaça nos sorteios. Em seu livro, *The Improbability Principle*, David J. Hand, professor de Matemática e pesquisador do Imperial College de Londres, apresenta uma argumentação que mostra que tais resultados não são tão inesperados quanto podemos pensar.

Os dois resultados iguais na loteria búlgara ocorreram na mesma semana. Sem dúvida: uau! Os dois resultados iguais na loteria de Israel ocorreram no mesmo ano. De novo, uau! Porém existem muito pares de sorteios em um ano. Ficaríamos impressionados se quaisquer desses pares apresentassem resultados iguais. De fato, também não nos importamos com onde o fato ocorre. Ele é um milagre e ponto!

b) Os sorteios da Sport Toto são realizados duas vezes por semana durante todo o ano. Qual é a probabilidade de termos pelo menos dois resultados iguais em um mesmo ano? *Você não precisa fazer as contas nesse item, basta deixar a resposta indicada.*

c) A expressão que você obteve no item anterior (esperamos) é igual a, aproximadamente, 0,04%. Sabendo que existem por volta de 100 grandes loterias (similares à Sport Toto) em todo o mundo, calcule a probabilidade de que ocorram dois resultados iguais no ano de 2015 em uma mesma grande loteria.

Você pode querer adotar a aproximação $(1-x)^n \approx 1 - nx$.

d) Estime o número de anos necessários para que a probabilidade de que ocorram dois resultados iguais em um mesmo ano em uma mesma grande loteria do mundo seja maior do que $\frac{1}{2}$.

Você pode querer adotar a aproximação

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \approx \sum_{1 \le i \le n} p(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} p(A_i \cap A_j)$$

em que $p(E)$ *indica a probabilidade do evento* E.

PROBLEMA 3
Um polinômio não constante com coeficientes racionais é *irredutível* se não pode ser escrito como o produto de dois polinômios não constantes de coeficientes racionais.
Polinômios irredutíveis são os análogos dos números primos e, como no Teorema Fundamental da Aritmética, é possível demonstrar que todo polinômio não constante é o produto de polinômios irredutíveis.
Sendo $m > 1$, é possível escrever $x^m - 1$ como o produto de polinômios irredutíveis ($x - 1$ é um dos fatores). Demonstra-se que, para cada inteiro positivo m, $x^m - 1$ possui exatamente um fator irredutível $\Phi_m(x)$ que não divide $x^k - 1$ para $k < m$. Os polinômios $\Phi_m(x)$, $m \geq 1$, são chamados *polinômios ciclotômicos*. Os primeiros polinômios ciclotômicos são $\Phi_1(x) = x - 1$, $\Phi_2(x) = x + 1,\ \Phi_3(x) = x^2 + x + 1,\ \Phi_4(x) = x^2 + 1$.
Pode-se mostrar que

$$x^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d(x)$$

em que, como indicado, o produtório percorre todos os divisores positivos de m. Por exemplo,

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1) = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) \cdot \Phi_4(x).$$

a) Determine $\Phi_{12}(x)$.

Antes de continuar a resolver a questão, vamos conhecer uma bela aplicação dos polinômios ciclotômicos à fatoração de números grandes, bem grandes!

Em 1871, Léon François Antoine Aurifeuille obteve a fatoração $2^{58} + 1 = 536838145 \cdot 536903681$ a partir da observação de que, quando substituímos $x = 2^{29}$ na identidade $\Phi_4(x) = x^2 + 1 = (x+1)^2 - 2x$, teremos

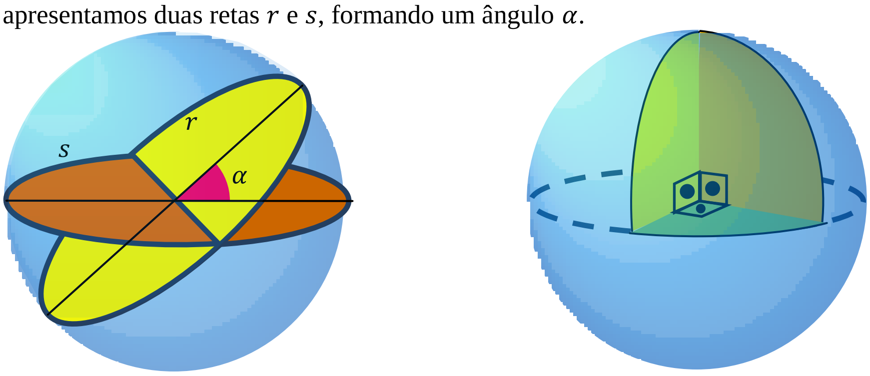
$$2^{58} + 1 = (2^{29} + 1)^2 - 2 \cdot 2^{29} = (2^{29} + 1)^2 - (2^{15})^2 = (2^{29} + 1 - 2^{15}) \cdot (2^{29} + 1 + 2^{15})$$

Vale a pena citar que, de fato, a fatoração em primos de $2^{58} + 1$ é $5 \cdot 107367629 \cdot 536903681$.
Andrzej Schinzel, pesquisador do Instituto de Matemática da Academia de Ciências da Polônia, avançou muito com a ideia de Aurifeuille, encontrando todas as identidades desse tipo. Ele mostrou, por exemplo, que, sendo h ímpar, é possível encontrar polinômios $C(x)$ e $D(x)$ com coeficientes inteiros tais que

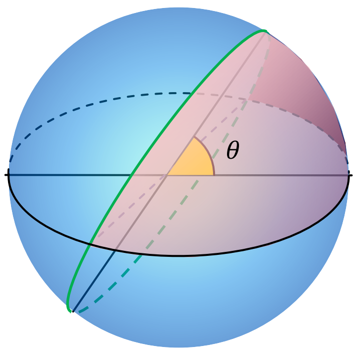
$$\Phi_{12}(6^h) = \left(C(6^h) - 6^{(h+1)/2} D(6^h)\right) \cdot \left(C(6^h) + 6^{(h+1)/2} D(6^h)\right).$$

b) Encontre $C(x)$ e $D(x)$ que satisfaçam a identidade acima.
c) Apresente a fatoração em primos de $24^6 + 1$.

PROBLEMA 4
Existem outros tipos de geometria além da que estudamos regularmente. Por exemplo, ao considerarmos que vivemos em um planeta aproximadamente esférico, faz sentido utilizar a chamada *geometria esférica*, que considera o “plano” como sendo a superfície de uma esfera. Para simplificar, tomaremos o raio da esfera como 1.
As “retas” da geometria esférica são as *grandes circunferências*, ou seja, as interseções da superfície esférica com planos que contêm o seu centro. Finalmente, definimos o “ângulo” entre duas retas como o ângulo entre os dois planos que as contêm. Na figura a seguir, à esquerda, apresentamos duas retas r e s, formando um ângulo α.

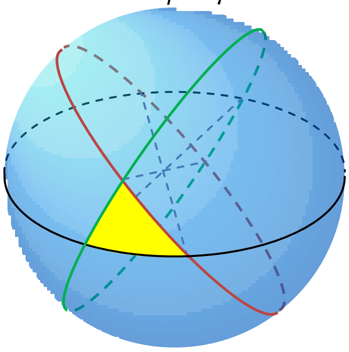


Em geometria esférica, a soma dos ângulos internos de um “triângulo esférico” (que é formado por três segmentos de retas) é maior do que 180°. Por exemplo, ao considerarmos o triângulo formado ao cortarmos a esfera em três planos perpendiculares dois a dois, obtemos um triângulo com os três ângulos internos iguais a 90° e, portanto, soma dos ângulos internos 270°.
a) Suponha que o ângulo entre as duas retas a seguir seja θ radianos. Prove que a região a seguir, que é uma das quatro regiões delimitadas pelas duas retas, tem área 2θ.



b) Observando a figura a seguir, mostre que a área de um triângulo esférico (que é o pedaço da superfície esférica delimitado pelos três planos correspondentes) com ângulos internos α, β e γ (em radianos) é

$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$



c) Um *triângulo de Coxeter*, cujo nome vem do renomado geômetra Harold Coxeter, é um triângulo com ângulos internos da forma $\frac{\pi}{a}$ rad, $\frac{\pi}{b}$ rad e $\frac{\pi}{c}$ rad, com a, b e c inteiros maiores que 1 e não necessariamente distintos, para os quais existe N inteiro positivo tal que N cópias do triângulo cobrem a esfera, sem buracos nem sobreposições.
Prove que $\frac{N}{a} + \frac{N}{b} + \frac{N}{c} = N + 4$.
d) Sabe-se que todas as soluções $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ com $a, b, c > 1$ da equação $\frac{N}{a} + \frac{N}{b} + \frac{N}{c} = N + 4$ correspondem a triângulos de Coxeter. Resolva essa equação.

Você pode querer utilizar o fato de que a superfície de uma esfera de raio R é $4\pi R^2$.

PROBLEMA 5
Uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é *antissimétrica* se, e somente se, satisfaz $a_{ji} = -a_{ij}$ para todos i, j, $1 \le i, j \le n$. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz antissimétrica, pois $a_{21} = -a_{12} = 1$ e $a_{11} = -a_{11} = a_{22} = -a_{22} = 0$. Nesse problema, mostraremos uma identidade envolvendo determinantes de matrizes antissimétricas de tamanho n par.
Pode-se mostrar, por exemplo, que

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2.$$

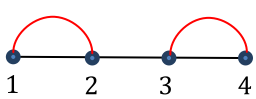
Na identidade anterior, obtemos o quadrado da soma de produtos da forma $\pm a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2}$ em que $\{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}\}$ é uma partição de $\{1,2,3,4\}$, ou seja, dividimos $\{1,2,3,4\}$ em dois subconjuntos com dois elementos. Será coincidência? (Você não precisa responder a essa pergunta.)
Dizemos que toda partição de $\{1,2,3,\ldots,n\}$ em $n/2$ subconjuntos com dois elementos é um *casamento* μ nesse conjunto, e denotamos, para simplificar,

$$\mu = i_1 j_1, i_2 j_2, \ldots, i_{\frac{n}{2}} j_{\frac{n}{2}}, \quad i_k < j_k.$$

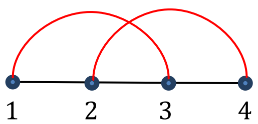
Também utilizaremos a notação

$$a_\mu = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_{\frac{n}{2}} j_{\frac{n}{2}}}.$$

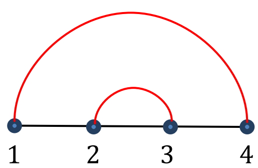
Finalmente, denotamos o *sinal* de μ por $\operatorname{sign}(\mu)$ e o definimos como $(-1)^{\#\mu}$, em que $\#\mu$ é a quantidade de cruzamentos obtidos quando desenhamos μ representando $1, 2, \ldots, n$ por pontos alinhados, nessa ordem, e conectando i_k a j_k por semicircunferências traçadas acima do segmento. Por exemplo, os três casamentos de $\{1,2,3,4\}$ têm os seguintes sinais:



12,34: sinal $(-1)^0 = 1$



13,24: sinal $(-1)^1 = -1$



14,23: sinal $(-1)^0 = 1$

Olha só que "coincidência"! O nosso determinante deu o quadrado da soma dos $\operatorname{sign}(\mu)a_\mu$ sobre os casamentos de $\{1,2,\ldots,n\}$!

Dada uma matriz antissimétrica A, definimos tal soma como o *Pfaffiano* de A:

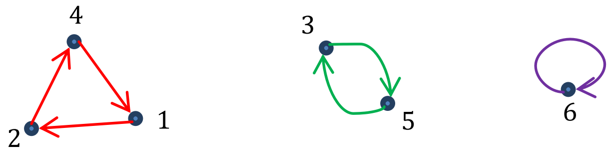
$$\operatorname{Pf}(A) = \sum_\mu \operatorname{sign}(\mu) a_\mu.$$

No nosso exemplo, $\operatorname{Pf}(A) = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$.

a) A definição de determinante é

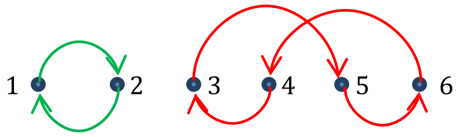
$$\det A = \sum_\pi \operatorname{sign}(\pi) a_\pi \text{, onde } a_\pi = a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \ldots a_{n\pi(n)}$$

em que a soma é sobre todas as permutações de $\{1,2,\dots,n\}$ e o sinal da permutação $\mathrm{sign}(\pi)$ é igual a $(-1)^k$, em que k é o número de transposições (trocas de duas posições da permutação) necessárias para chegar à permutação identidade $I = (1,2,\dots,n)$. Todas as formas de fazer essas trocas resultarão na mesma paridade, portanto $\mathrm{sign}(\pi)$ terá um valor único. Por exemplo, para determinar o sinal de $\pi = (3,2,1)$ observamos que trocando o 3 e o 1, chegamos em $I = (1,2,3)$. Então $\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^1 = -1$.
Uma maneira útil de representar permutações é por *ciclos*, em que consideramos os pontos 1 a n, agora livres no plano, e ligamos por uma flecha i a $\pi(i)$. Por exemplo, a permutação $\pi = (2,4,5,1,3,6)$, em que $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 4$, $\pi(3) = 5$, $\pi(4) = 1$, $\pi(5) = 3$ e $\pi(6) = 6$, é representada por



Podemos então representar a permutação acima como $\pi = (124)(35)(6) = \pi_1\pi_2\pi_3$ com $\pi_1 = (124)$, $\pi_2 = (35)$ e $\pi_3 = (6)$.
Seja A uma matriz antissimétrica. Suponha que $\pi = \pi_1\pi_2 \dots \pi_m$ seja uma permutação que contém um ciclo ímpar π_1. Veja que podemos escrever $a_\pi = a_{\pi_1} a_{\pi_2} \dots a_{\pi_m}$. Se π_1 for um ciclo de tamanho 1 então $a_{\pi_1} = a_{kk} = 0$, já que a matriz é antissimétrica, logo $a_\pi = 0$. Caso π_1 seja um ciclo de tamanho ímpar maior que 1, mostre que as parcelas $\mathrm{sign}(\pi)a_\pi$ e $\mathrm{sign}(\pi')a'_\pi$ correspondentes a π e $\pi' = \pi_1^{-1}\pi_2 \dots \pi_n$, em que π_1^{-1} é o ciclo π_1 com as flechas invertidas, se cancelam no determinante.

b) Uma permutação pode ser representada com os pontos de 1 a n alinhados em ordem. Para as que só têm ciclos pares, a figura fica interessante: $(12)(3564)$ vira



e pode ser decomposta em dois casamentos $\mu = 12{,}35{,}46$ e $\nu = 12{,}34{,}56$.
Prove que toda permutação π formada somente de ciclos pares pode ser decomposta em dois casamentos μ e ν. Prove também que quaisquer dois casamentos μ e ν geram uma permutação π formada somente de ciclos pares. Conclua que $a_\mu a_\nu = a_\pi(-1)^{e(\pi)}$, em que $e(\pi)$ é a quantidade de elementos do conjunto $\{\, i \mid \pi(i) < i \,\}$.

c) Sejam $\#\mu$ e $\#\nu$ as quantidades de cruzamentos dos casamentos μ e ν de $\{1,2,\dots,n\}$ e seja m a quantidade de ciclos, todos de tamanho par, da permutação π. Sabe-se que $\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^m$, logo:

$$\mathrm{sign}(\mu)a_\mu \cdot \mathrm{sign}(\nu)a_\nu = \mathrm{sign}(\pi)a_\pi \Leftrightarrow (-1)^{\#\mu+\#\nu+e(\pi)} = (-1)^m.$$

Isso é equivalente a provar que $\#\mu + \#\nu + e(\pi)$ e m são ambos pares ou ambos ímpares.
Prove que a paridade de $\#\mu + \#\nu + e(\pi)$ não muda se trocarmos as posições de i e $i+1$ nos ciclos da permutação π. Por exemplo, a partir de $\pi = (12)(3564)$, dada acima, podemos trocar 4 e 5, obtendo $(12)(3465)$. Trocando 5 e 6 teremos $\tilde{\pi} = (12)(3456)$ sem alterar a paridade da expressão $\#\mu + \#\nu + e(\pi)$.

d) Utilizando as trocas das posições de i e $i+1$, a partir de uma permutação π podemos obter $\tilde{\pi}$ em que os seus ciclos apresentam os números em ordem crescente.
Mostre, dada qualquer permutação π, $\#\mu + \#\nu + e(\pi)$ tem a mesma paridade de $\#\tilde{\mu} + \#\tilde{\nu} + e(\tilde{\pi})$.
Conclua que $\#\mu + \#\nu + e(\pi)$ e m (veja o item anterior) têm a mesma paridade.

e) Demonstre que $\det A = \big(\mathrm{Pf}(A)\big)^2$ para toda matriz antissimétrica A de tamanho par.