XXXVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (9 de novembro de 2013)
Nível γ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

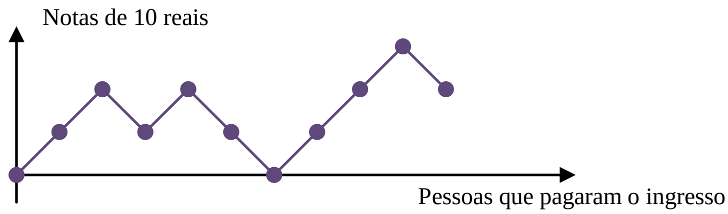
Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

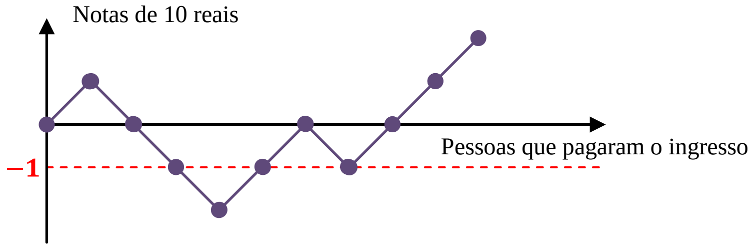
Em um cinema, o ingresso custa 10 reais. Há n pessoas na fila, sendo que k têm uma nota de 20 reais e as demais $n-k$ têm uma nota de 10 reais. Inicialmente, não há dinheiro na única bilheteria. Nesse problema, contaremos de quantas maneiras podemos formar a fila com as n pessoas de modo que o caixa nunca fique sem troco conforme as pessoas vão comprando os ingressos. Entenderemos *fila* como uma n-upla ordenada em que cada entrada é igual a 10 ou a 20, de acordo com a nota de dinheiro que a pessoa na posição correspondente na fila do cinema possui. Chamaremos as filas em que o caixa nunca fique sem troco de *sortudas*. Um exemplo de fila sortuda é (10,10,20,10,20,20,10,10,10,20): as duas primeiras pessoas da fila têm uma nota de 10 reais, a terceira tem uma nota de 20 reais, a quarta tem uma nota de 10 reais e assim por diante (o caixa nunca fica sem troco, pode verificar!). Denotamos $f(n,k)$ a quantidade de filas sortudas.

Primeiro, note que, após todas as pessoas terem comprado seus ingressos, o caixa teve que dar troco de 10 reais para k pessoas e recebeu um total de $n-k$ notas de 10 reais. Logo, no final ele fica com $n-2k$ notas de 10 reais. Portanto $n-2k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq \frac{n}{2}$. O gráfico da quantidade de notas de 10 reais de que o caixa dispõe após m pessoas pagarem seus ingressos tem o seguinte aspecto (aqui representamos a fila (10,10,20,10,20,20,10,10,10,20), em que $n=10$ e $k=4$):

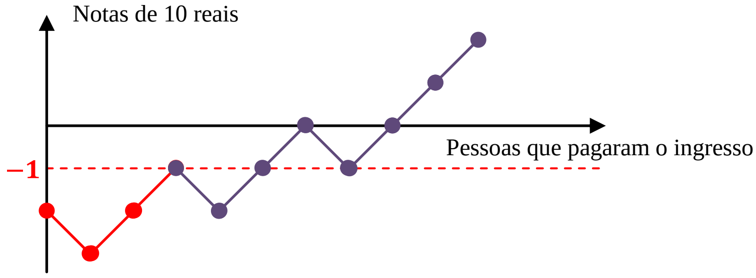


a) Quantas são as filas, sortudas ou não, com n elementos, sendo k elementos iguais a 20?

b) Vamos agora contar a quantidade de filas não sortudas. O gráfico correspondente a uma fila não sortuda tem que descer até a reta $y=-1$:



Para cada gráfico correspondente a uma fila não sortuda, considere a primeira vez que o gráfico toca a reta $y=-1$ e faça uma reflexão da parte do gráfico à esquerda desse ponto em relação à reta $y=-1$, obtendo o que chamaremos de *gráfico modificado*:



b.1) Quantos são os gráficos modificados correspondentes a filas não sortudas com n elementos, com k valores iguais a 20?

b.2) Prove que $f(n,k) = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$ para $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

c) Pode-se provar que, para n suficientemente grande, vale a *aproximação de Stirling*

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

A sala de cinema com maior capacidade no Brasil é o IMAX do shopping JK, com 382 lugares. Suponha que o preço do ingresso lá seja 10 reais e que 382 pessoas, cada uma com exatamente uma nota de 10 reais ou uma nota de 20 reais, vá assistir a um filme. Utilizando a aproximação de Stirling, calcule a probabilidade aproximada de que o solitário caixa (coitado de quem for o último na fila!) nunca fique sem troco.

PROBLEMA 2
Uma das várias aplicações de determinantes e sistemas lineares é determinar se dois polinômios têm raiz comum ou não. Considere, por exemplo, $A(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 4$ e $B(x) = x^2 - 3x + 1$. Suponha que esses dois polinômios tenham uma raiz comum r. Então $r^3 - 7r^2 + 13r - 4 = 0$ e $r^2 - 3r + 1 = 0$. Multiplicando a primeira equação por r e a segunda por r e r^2, obtemos duas equações baseadas em $A(r) = 0$ e três equações baseadas em $B(r) = 0$. Observe que 2 é o grau do polinômio B e 3 é o grau do polinômio A:

$$\begin{cases} -4 + 13r - 7r^2 + r^3 = 0 \\ -4r + 13r^2 - 7r^3 + r^4 = 0 \\ 1 - 3r + r^2 = 0 \\ r - 3r^2 + r^3 = 0 \\ r^2 - 3r^3 + r^4 = 0 \end{cases}$$

Agora, sejam $x_0 = 1, x_1 = r, x_2 = r^2, x_3 = r^3$ e $x_4 = r^4$. A conta acima implica que o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} -4x_0 + 13x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 13x_2 - 7x_3 + x_4 = 0 \\ x_0 - 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

tem solução diferente da trivial, ou seja, devemos verificar se o determinante a seguir é nulo ou não.

$$\begin{vmatrix} -4 & 13 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Pode-se provar que a recíproca é verdadeira. Deste modo, basta verificar se o determinante acima, chamado *resultante de* $A(x)$ *e* $B(x)$, é nulo ou não. O teorema de Chiò dá conta disso:

$$\begin{vmatrix} -4 & 13 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 13 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 13-(-3)\cdot(-4) & -7-1\cdot(-4) & 1-0\cdot(-4) & 0-0\cdot(-4) \\ -4-(-3)\cdot 0 & 13-1\cdot 0 & -7-0\cdot 0 & 1-0\cdot 0 \\ 1-(-3)\cdot 0 & -3-1\cdot 0 & 1-0\cdot 0 & 0-0\cdot 0 \\ 0-(-3)\cdot 0 & 1-1\cdot 0 & -3-0\cdot 0 & 1-0\cdot 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 13 & -7 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pois o determinante de uma matriz com duas linhas iguais é nulo.
Logo $A(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 4$ e $B(x) = x^2 - 3x + 1$ têm raiz comum (pode-se verificar que são $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$).
Agora é a sua vez! Encontre os valores reais de a para os quais os polinômios $P(x) = x^2 - ax + 1$ e $Q(x) = ax^2 - x - a$ tenham raiz comum.

Nesse problema você pode querer usar teorema de Chiò para calcular o determinante de uma matriz 4×4 *como, por exemplo,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6-2\cdot 5 & 7-3\cdot 5 & 8-4\cdot 5 \\ 1-2\cdot 9 & 2-3\cdot 9 & 3-4\cdot 9 \\ 5-2\cdot(-4) & 6-3\cdot(-4) & 7-4\cdot(-4) \end{vmatrix}$$

E para finalizar, basta calcular o determinante de ordem 3 *obtido.*

PROBLEMA 3
Os números reais podem ser expressos na forma de *frações contínuas*, isto é, na forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

em que a_0 é inteiro e $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são inteiros positivos. Utiliza-se a notação $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$
Por exemplo, para escrever $\frac{2013}{37}$ na forma de fração contínua, inicialmente, calculamos o maior inteiro menor ou igual a esse racional. Esse é o a_0. Assim:

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \cfrac{1}{\frac{37}{15}}$$

E repetimos o processo agora para $\frac{37}{15}$ e, assim por diante, obtendo $a_1, a_2, a_3, \ldots$

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \cfrac{1}{\frac{37}{15}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \frac{7}{15}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{15}{7}}} = 54 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}$$

Temos então que $\frac{2013}{37} = [54; 2,2,7]$. Pode-se demonstrar que todo racional tem uma representação finita (com um número finito de a_i's) como fração contínua.
As coisas ficam ainda mais interessantes quando consideramos os números irracionais. Cada irracional possui uma representação única como fração contínua a qual é infinita. E, quando a truncamos, ela fornece as melhores aproximações racionais para ele.
Por exemplo, $\pi = 3{,}14159265\ldots = [3; 7,15,1,292,1,1,1,2,1,3, \ldots]$. Adotando

$$\pi \approx [3; 7,15,1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3{,}14159292\ldots$$

obtemos uma excelente aproximação!
Uma questão extremamente interessante da teoria de frações contínuas é: quais números têm uma representação periódica quando escritos dessa maneira? Por exemplo, qual número real tem a representação $[1; 1,1,1, \ldots] = [1; \overline{1}]$?

Seja

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Então podemos observar que (verifique) $x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e, como x é positivo, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a razão áurea!
E como é a representação de $\sqrt{3}$? Fazemos o procedimento usual. O maior inteiro menor do que $\sqrt{3}$ é 1. Assim:

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{3} - 1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1})}}$$

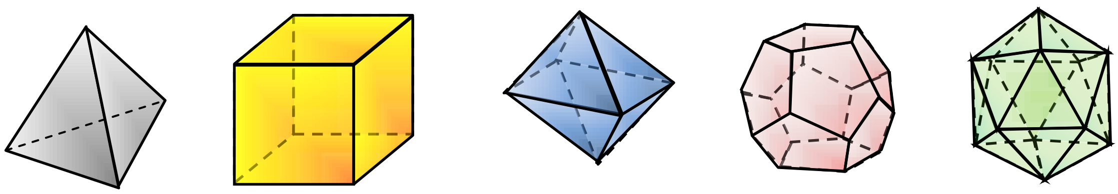
Repetindo as passagens acima:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1})}}}}$$

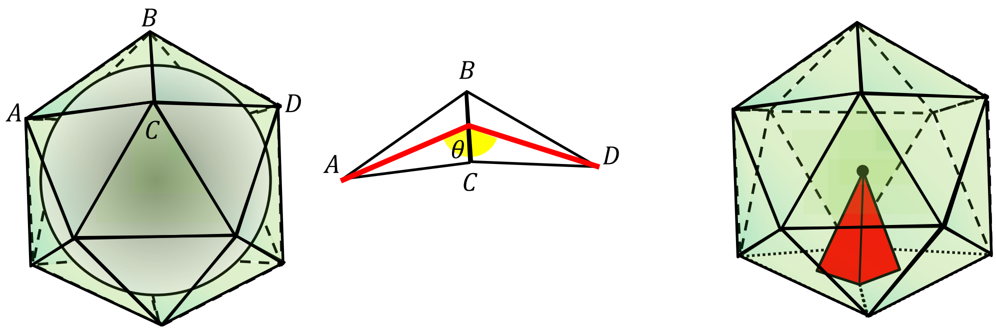
E assim por diante. Ou seja, $\sqrt{3} = [1; 1,2,1,2, \ldots] = [1; \overline{1,2}]$.
a) Escreva a representação de $\frac{2017}{41}$ como fração contínua.
b) Escreva a representação de $\sqrt{11}$ como fração contínua e conclua que $\sqrt{11} \approx \frac{199}{60}$.
c) Temos que $\sqrt{41} = [6; \overline{2,2,12}]$ é um irracional da forma $\sqrt{D}$, em que D é um inteiro positivo, cujo período da representação como fração contínua tem tamanho 3.
Esses números são raros. De fato, há apenas sete menores do que 1000: $\sqrt{41} = [6; \overline{2,2,12}]$, $\sqrt{130} = [11; \overline{2,2,22}]$, $\sqrt{269} = [16; \overline{2,2,32}]$, $\sqrt{370} = [19; \overline{4,4,38}]$, $\sqrt{458} = [21; \overline{2,2,42}]$, $\sqrt{697} = [26; \overline{2,2,52}]$, $\sqrt{986} = [31; \overline{2,2,62}]$.
Determine um número D maior do que 2013 tal que a representação de $\sqrt{D}$ como fração contínua tenha período 3.
Observe que 6 dos exemplos apresentados obedecem a um mesmo padrão. Pode ser útil aplicá-lo.

PROBLEMA 4

Os sólidos de Platão têm faces com mesmas quantidades de arestas e, além disso, de cada vértice sai a mesma quantidade de arestas. Se todas as arestas têm a mesma medida, o sólido de Platão é *regular*. Pode-se provar que há cinco sólidos de Platão: o *tetraedro*, o *hexaedro*, o *octaedro*, o *dodecaedro* e o *icosaedro*.



Você já deve conhecer bem os dois primeiros sólidos, e quem sabe o terceiro. Nesse problema, daremos uma atenção especial aos outros dois.
a) Primeiro calcularemos o raio da esfera inscrita no icosaedro regular, que é o sólido de Platão com 20 faces triangulares.



a.1) Sendo θ o ângulo diédrico entre as faces ABC e BCD do icosaedro regular, calcule $\cos\theta$.
a.2) Considere o quadrilátero destacado na figura da direita, que tem como vértices o centro do icosaedro, dois centros de faces adjacentes e o ponto médio de uma das arestas. Sendo ℓ a medida da aresta do icosaedro, calcule o raio da esfera inscrita no icosaedro.
b) Os centros das faces do icosaedro regular são os vértices de um dodecaedro regular. Sendo m a medida da aresta do dodecaedro, calcule o raio da esfera circunscrita ao dodecaedro regular.
Você pode querer utilizar os seguintes dados:

- *A diagonal de um pentágono regular de lado x é $x \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*
- $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$.

PROBLEMA 5

Como as calculadoras calculam seno e cosseno? Ao contrário do que se pensa, elas não usam aproximações polinomiais, e sim uma outra sequência que usa operações mais simples. O *método CORDIC* utiliza as seguintes sequências: para $1 \leq k \leq n$, sejam

$$x_{k+1} = x_k - \operatorname{sgn}(z_k) \cdot y_k \cdot \frac{1}{2^k}$$
$$y_{k+1} = y_k + \operatorname{sgn}(z_k) \cdot x_k \cdot \frac{1}{2^k}$$
$$z_{k+1} = z_k - \operatorname{sgn}(z_k) \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{2^k}$$

Aqui, $\operatorname{sgn}(z_k)$ é o *sinal* de z_k, ou seja,

$$\operatorname{sgn}(z_k) = \begin{cases} 1, \text{se } z_k \geq 0 \\ -1, \text{se } z_k < 0 \end{cases}$$

e veremos que é escolhido para que z_{n+1} fique próximo de zero. Além disso, $\operatorname{arctg} x$ é o arco α, com $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tal que $\operatorname{tg} \alpha = x$.

Os valores iniciais da sequência são

$$x_0 = K = \cos(\operatorname{arctg} 1) \cdot \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) \cdot \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2^2}\right) \cdots \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2^n}\right), \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \theta,$$

em que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Ao final dos cálculos, temos $z_{n+1} \approx 0$, $x_{n+1} \approx \cos\theta$ e $y_{n+1} \approx \operatorname{sen}\theta$ para n suficientemente grande. Assim, a calculadora mostra no visor x_{n+1} ao apertarmos a tecla $\boxed{\texttt{cos}}$ e y_{n+1} ao apertarmos $\boxed{\texttt{sen}}$.

Vamos provar essas últimas afirmações.

a) Prove que

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\operatorname{sgn}(z_k)}{2^k} \\ \frac{\operatorname{sgn}(z_k)}{2^k} & 1 \end{bmatrix}$$

b) Mostre que

$$A = \frac{1}{\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}\right)} \begin{bmatrix} \cos\left(\operatorname{sgn}(z_k)\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}\right) & -\operatorname{sen}\left(\operatorname{sgn}(z_k)\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\operatorname{sgn}(z_k)\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}\right) & \cos\left(\operatorname{sgn}(z_k)\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}\right) \end{bmatrix}$$

c) Demonstre que

$$z_{n+1} = \theta - \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sgn}(z_k)\operatorname{arctg}\frac{1}{2^k}, \quad x_{n+1} = \cos(\theta - z_{n+1}) \quad \text{e} \quad y_{n+1} = \operatorname{sen}(\theta - z_{n+1}).$$

d) Prove que $|z_k| \leq \operatorname{arctg}\frac{1}{2^{k-1}}$ para $k \geq 1$. Note que isso faz com que z_{n+1} fique próximo de zero para n grande.

e) Enfim, mostre que x_{n+1} e y_{n+1} são boas aproximações para $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ para n grande. Mais especificamente, prove que

$$|x_{n+1} - \cos\theta| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad |y_{n+1} - \operatorname{sen}\theta| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Você pode querer utilizar as seguintes fórmulas:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$