XXXVII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Prova da Fase Final (9 de novembro de 2013)
Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1
A ponte aérea Rio de Janeiro – São Paulo é o terceiro trajeto aéreo mais procurado no mundo, sendo superado apenas pelo trecho Jeju – Seul (Coreia do Sul) e por Sapporo – Tóquio (Japão).
Em uma semana regular, 4 companhias aéreas oferecem voos entre o Rio de Janeiro e São Paulo. Veja os dados:

Empresa	Voos por semana	Quantidade semanal de passageiros transportados
Avianca	140	18480
Azul	2	236
Gol	396	72468
TAM	397	57168

a) Quantos voos são oferecidos na ponte aérea por semana?
b) Qual das companhias tem a maior média de passageiros transportados por voo?
c) Qual a porcentagem de pessoas transportadas pela companhia com o maior número de voos, em relação ao total de pessoas transportadas por semana?
d) Admitindo que 95% dos voos ocorrem entre 7h e 23h, a cada quantos minutos, em média, sai um voo da ponte aérea nesse intervalo?

PROBLEMA 2
Sitaram Asur e Bernardo Huberman, pesquisadores de mídias sociais, obtiveram, através de dados coletados no Twitter em 2010, uma equação que permite prever as vendas de bilheteria de filmes. A equação tinha uma precisão tão grande que superava as principais ferramentas de previsão na época. A equação tem a forma:

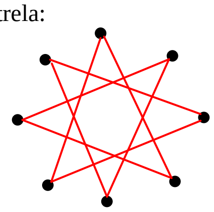
$$y = 0{,}015 \cdot A + 1{,}6 \cdot P + 0{,}003 \cdot N$$

em que
- y é a previsão de dinheiro ganho com a venda de ingressos do filme, em milhões;
- A é a *atenção* gerada pelo filme, em tweets (mensagens) por hora, ou seja, é a quantidade média de tweets que se referem ao filme por hora;
- P é a *polaridade*, que é a razão entre as quantidades de tweets positivos (de pessoas que gostaram do filme) e tweets negativos (de pessoas que não gostaram do filme): $P = \frac{\text{tweets positivos}}{\text{tweets negativos}}$;
- N é a quantidade de cinemas em que o filme está sendo exibido.

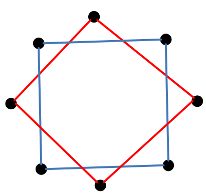
Por exemplo, *Crepúsculo: Lua Nova* estava em 4024 cinemas nos EUA, obtendo um total de aproximadamente 43 milhões de dólares na segunda semana. Nessa semana, esse filme teve atenção de 259360 tweets, dando $\frac{259360}{7\cdot 24} \approx 1543{,}8$ tweets por hora. Destes, 216135 foram positivos e os demais $259360 - 216135 = 43225$ foram negativos, dando uma polaridade de $\frac{216135}{43225} \approx 5{,}0$. A equação previa $y = 0{,}015 \cdot 1543{,}8 + 1{,}6 \cdot 5{,}0 + 0{,}003 \cdot 4024 = 43{,}229$ milhões de dólares. Nada mal!
a) O filme *Avatar*, na sua segunda semana em cartaz, estava em 3456 cinemas norte-americanos. Na Internet, 713195 tweets falavam sobre o filme nessa semana, dos quais 475463 foram positivos. Considerando o modelo, quantos milhões de dólares o filme arrecadou?
b) Um filme que melhorou muito sua arrecadação foi *Um Sonho Possível*. Ele estava em 3110 cinemas nos EUA na sua segunda semana. Se ele mantivesse sua polaridade inicial de 5, conseguiria $32{,}33$ milhões de dólares segundo o modelo. Porém a reação ao filme foi muito positiva, e sua polaridade foi para $9{,}65$. Para quanto foi sua arrecadação, de acordo com o modelo?

PROBLEMA 3
Há várias maneiras de desenhar estrelas. Uma é:
Passo 1: Desenhar n pontos em roda;
Passo 2: Começar de um ponto qualquer, contar k pontos no sentido horário, e ligar ao próximo ponto. Repetir até voltar a um ponto já visitado;
Passo 3: Caso haja pontos sem ligar, escolher outro ponto qualquer e executar o passo anterior novamente, com o mesmo valor de k.
Com isso, obtemos uma $[n/k]$-estrela.

Observe uma $[8/3]$-estrela e uma $[8/2]$-estrela:



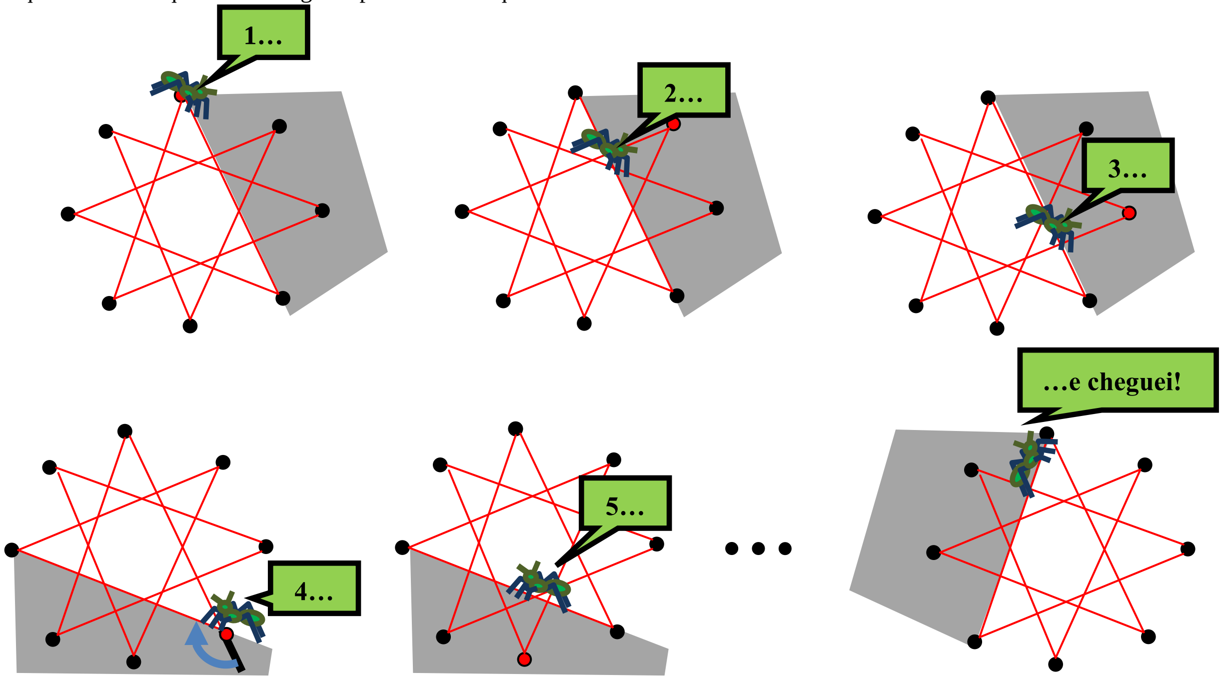
$[8/3]$-estrela



$[8/2]$-estrela

a) Desenhe uma $[11/4]$-estrela, usando os pontos desenhados no *Bloco de Resoluções*.

Agora, vamos calcular a soma dos ângulos das pontas de uma $[8/3]$-estrela, com a ajuda de Formigreen, a pequena formiga verde mineira. Formigreen está em um dos vértices da estrela e começa a andar pelos seus lados, no sentido horário. Enquanto faz isso, conta os vértices por que passa e os que vê à sua esquerda. Formigreen para de andar quando volta ao vértice inicial.



Note que, a cada vez que Formigreen chega a um vértice, vira o equivalente à medida de um ângulo externo da estrela.

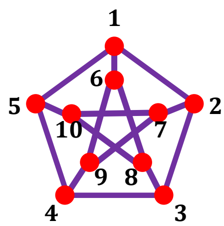
b) Ao final do passeio, quantas vezes Formigreen contou cada vértice?

c) Calcule a soma dos ângulos externos da $[8/3]$-estrela.

d) Calcule a soma dos ângulos internos, ou seja, das pontas da $[8/3]$-estrela.

PROBLEMA 4

Grafos são diagramas como os mostrados a seguir. Os pontos destacados são chamados vértices e as linhas que ligam os vértices são chamadas arestas. O grafo a seguir é o *grafo de Petersen*. Já viu ele? (Diga "sim".)

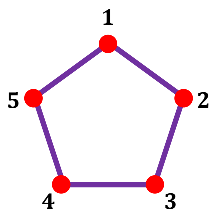


O jogo *Policiais e Ladrão* é disputado sobre um grafo. Há dois jogadores: um com um conjunto de *policiais* e um com um único *ladrão*. Na rodada zero, o jogador que comanda os policiais começa escolhendo os vértices que eles irão ocupar inicialmente e depois é a vez de o jogador que comanda o ladrão escolher o seu vértice inicial. Durante o jogo, é permitido que policiais ocupem um mesmo vértice.

As rodadas seguintes sempre começam com os movimentos dos policiais. Depois que todos eles fazem os seus movimentos é a vez do ladrão. Cada movimento consiste em ir para um vértice vizinho, ou seja, que está ligado por uma aresta; ou ficar no vértice em que está.

Os policiais ganham se conseguirem pegar o ladrão, ou seja, ocupar o mesmo vértice em que está o ladrão.

Consideremos o seguinte exemplo.

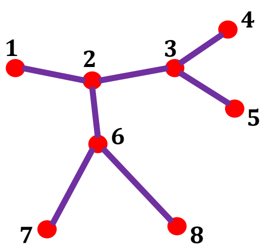


Suponha que haja um único policial que é colocado inicialmente no vértice 1. O ladrão deve escolher o vértice 3 ou 4, pois caso contrário perde na primeira rodada. E é fácil perceber que o policial não conseguirá capturar o ladrão, pois o ladrão consegue manter-se sempre em um vértice que não é vizinho do vértice em que o policial está.

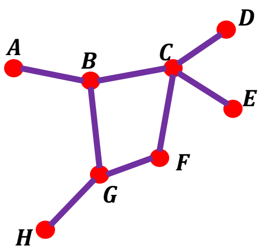
Suponha agora que são dois policiais. Colocando-os nos vértices 1 e 3, podemos perceber que o ladrão será capturado na primeira rodada. Dizemos que esse grafo tem *copnumber* igual a 2, ou seja, o número mínimo de policiais para garantir a vitória é 2.

a) Calcule o copnumber do Grafo de Petersen, o símbolo da OPM.

b) Uma árvore é um grafo em que, dados dois vértices, há exatamente uma maneira de ir de um até o outro através das suas arestas. O primeiro grafo abaixo é uma árvore (por exemplo, existe exatamente um único caminho entre $\mathbf{1}$ e $\mathbf{5}$: $\mathbf{1-2-3-5}$) e o segundo não é (há dois caminhos entre, por exemplo, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{F}$ – você consegue encontrá-los?).



Árvore



Não é árvore

Prove que o copnumber de qualquer árvore é 1.

PROBLEMA 5

Existem muitos problemas (muitos mesmo!) em Matemática cuja solução não é conhecida até hoje, são os chamados *Problemas em Aberto*, os quais normalmente envolvem *Conjecturas* (suposições não confirmadas). Nessa questão vamos explorar um desses problemas em aberto.

Tome a soma dos divisores positivos próprios de um inteiro positivo n, ou seja, a soma dos inteiros positivos que são divisores de n e menores do que n. Por exemplo, a soma dos divisores positivos próprios de 12 é $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$. Agora considere a soma dos divisores próprios do valor obtido e assim sucessivamente. Começando por 12 teremos a sequência $12 \to 16 \to 15 \to 9 \to 4 \to 3 \to 1$ e 1 é um número que não possui divisores positivos próprios. Vejamos outros exemplos:

• $95 \to 25 \to 6 \to 6 \to \cdots$: A sequência fica constante igual a 6 (ciclo de tamanho 1)

• $220 \to 284 \to 220 \to 284 \to \cdots$: Os números 220 e 284 alternam-se na sequência (ciclo de tamanho 2).

Essas sequências são chamadas *Sequências Alíquota*.

Em 1888, Eugène Catalan conjecturou que todas as sequências alíquota terminam em 1 ou em algum ciclo. Surpreendentemente, não é sabido até hoje se isso ocorre mesmo para sequências iniciadas por números "pequenos" como 276.

a) Verifique que a sequência alíquota inicia pelo número 30 satisfaz a conjectura de Catalan.

Algumas sequências alíquota satisfazem a conjectura de Catalan, porém "demoram" para chegar no 1 ou em um ciclo. Por exemplo, a sequência $936 \to 1794 \to 2238 \to 2250 \to \cdots \to 74 \to 40 \to 50 \to 43 \to 1$ tem 189 termos sendo o maior deles $33\,289\,162\,091\,526$! Isso leva a outro problema em aberto: *existem sequências alíquota arbitrariamente longas terminadas em* 1*?*

b) Mostre que o penúltimo termo de uma sequência terminada em 1 sempre é um número primo.

c) Exiba uma sequência alíquota com 10 termos terminada em $9 \to 4 \to 3 \to 1$ cujos demais seis termos sejam produtos de dois primos distintos.

d) Como foi dito no início do enunciado, os problemas em aberto são muitos. E muitas vezes possuem conexões interessantes.

Considere o problema em aberto: *todo número par maior do que* 6 *é a soma de dois primos distintos?* Suponha que alguém tenha demonstrado que, de fato, isso ocorre. Prove que, então, pode-se concluir que existem sequências alíquota arbitrariamente longas terminadas em 1.