XXXV OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (5 de novembro de 2011)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis.
- É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares ou de aparelhos com acesso à Internet).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Aino e Eino, exímios pizzaiolos residentes em Rovaniemi (terra do Papai Noel e capital da Lapônia, Finlândia), vieram para São Paulo, mais precisamente para a Cidade Universitária da USP.

Para se deslocarem até a USP, eles primeiramente foram de trem de Rovaniemi até Helsinki. A viagem é de 829 km e eles gastaram 75 euros cada um.

De Helsinki eles seguiram de avião até São Paulo, gastando 825 dólares cada um para percorrer o trajeto de 11299 km.

Do aeroporto internacional de São Paulo eles foram para a USP de táxi, e gastaram juntos 90 reais, percorrendo 43 km.

a) Desprezando as distâncias percorridas a pé, quantos quilômetros eles percorreram do momento em que saíram de Rovaniemi até quando chegaram na USP? (Seja grato aos esforços do Papai Noel para chegar à sua casa, no caso de você ter se comportado bem!)

b) Considerando que 1 euro vale 2,40 reais e que 1 dólar vale 1,72 real, quantos reais eles gastaram no total com transporte para ir de Rovaniemi até a USP?

c) Agora é hora de Aino e Eino trabalharem. Eles vão preparar 568 pizzas tipicamente finlandesas, uma para cada um dos 568 participantes da fase final da OPM na USP. O custo com o preparo da pizza é 11,21 reais. Admitindo que para voltar para casa eles vão gastar com transporte o mesmo que gastaram para vir e supondo que todas as pizzas serão vendidas, qual é o preço mínimo da pizza para eles pagarem as duas viagens de ida, as duas viagens de volta e o custo de preparo?

PROBLEMA 2

No Egito Antigo, as frações eram expressas principalmente como somas de frações distintas com numerador igual a 1. Por isso, frações com numerador igual a 1 são chamadas *frações egípcias*. Por exemplo, eles utilizavam $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ no lugar de $\frac{8}{15}$ (mais precisamente, eles escreviam hieróglifos que representam $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$).

Os matemáticos questionaram se era possível representar todo número racional $\frac{p}{q}$, com $1 \le p < q$, como soma de frações egípcias distintas. A resposta é sim, e foi encontrada por Fibonacci (o mesmo da sequência!).

Para isso, pode-se utilizar o *algoritmo guloso*, que funciona da seguinte forma: subtraímos da fração $\frac{p}{q}$ a maior fração $\frac{1}{n}$ que é menor do que $\frac{p}{q}$ e depois continuamos o processo com a fração que sobrar. Por exemplo:

$$\frac{4}{17}=\frac{1}{5}+\left(\frac{4}{17}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}+\frac{3}{85}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{2}{2465}=\frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{1}{1233}+\frac{1}{3039345}$$

a) Escreva $\frac{3}{7}$ como soma de frações egípcias distintas.

b) O problema do algoritmo guloso é que ele gera frações com denominadores muito grandes (como 3039345 no exemplo acima). O próprio Fibonacci sugeriu outro método, baseado na identidade $\frac{a}{ab-1}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b(ab-1)}$. Por exemplo, o algoritmo guloso gera, para $\frac{8}{11}$, a expansão

$$\frac{8}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{37}+\frac{1}{4070}$$

Para aplicarmos a ideia de Fibonacci, escrevemos $\frac{8}{11}$ como soma de frações cujos numeradores são divisores distintos do sucessor do denominador, ou seja, de $11+1=12$, e utilizamos a identidade acima:

$$\frac{8}{11}=\frac{2}{11}+\frac{6}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}+\frac{1}{2}+\frac{1}{22}$$

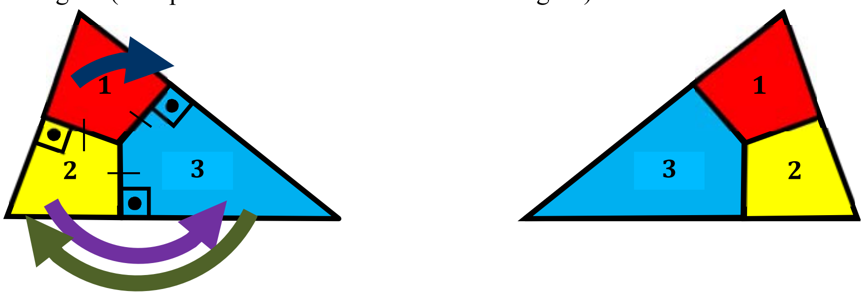
Tendo essa ideia em mente, escreva $\frac{33}{119}$ como soma de frações egípcias distintas, todas com denominadores menores que 2011.

PROBLEMA 3

Aino e Eino, os primos finlandeses de Arnaldo e Bernaldo, abriram um restaurante especializado em *jauhelihapizza*, uma pizza de carne moída finlandesa. Aino e Eino fazem pizzas triangulares.

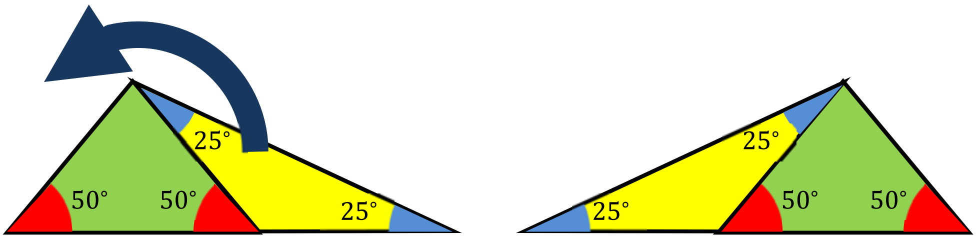
As pizzas são feitas por Aino e entregues em caixas feitas por Eino sob medida e que as acondicionam perfeitamente. Todavia, Eino às vezes erra, fazendo uma caixa que é congruente à pizza mas está invertida (ou seja, é uma versão espelhada da pizza):

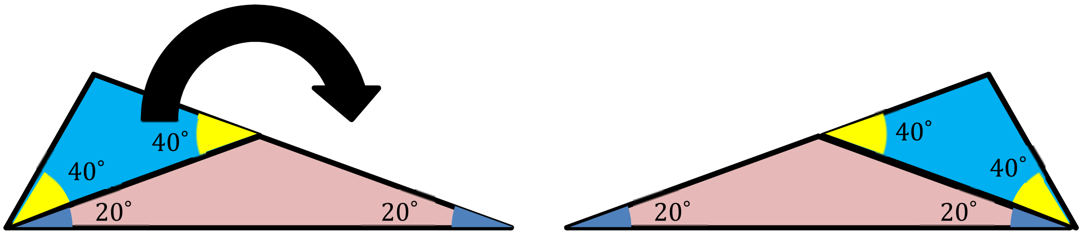
Aino desenvolveu uma técnica para colocar a pizza na caixa sem virá-la de cabeça para baixo (afinal, não podemos arruinar a deliciosa cobertura de carne moída!). Ele corta a pizza em três pedaços, fazendo cortes a partir de um ponto que está à mesma distância dos três lados do triângulo (esse ponto é chamado *incentro* do triângulo):



Porém um dos clientes de Aino e Eino, o professor Piraldo, faz pedidos um pouco mais excêntricos. Ele pede que as pizzas venham em no máximo dois pedaços e especifica também os ângulos internos da pizza. Ele pediu, dessa vez, quatro pizzas: uma com ângulos internos de 25°, 50° e 105°; uma com ângulos internos 30°, 60° e 90°; uma com ângulos internos 20°, 60° e 100°; e uma com ângulos internos de 15°, 45° e 120°.

Infelizmente, Eino fez as caixas invertidas novamente (que azar!). Aino conseguiu cortar duas das pizzas em dois pedaços e encaixá-los:





Agora é a sua vez! Em ambos os itens a seguir, faça como nas figuras acima, marcando os ângulos nos pedaços de pizza e como girá-los.

a) Mostre como Aino deve cortar a pizza com ângulos internos 30°, 60° e 90° em dois pedaços para colocá-los na caixa.

b) Mostre como Aino deve cortar a pizza com ângulos internos 15°, 45° e 120° em dois pedaços para colocá-los na caixa.

PROBLEMA 4

O grande matemático John Horton Conway (já presente em outras OPMs) criou uma linguagem de programação baseada em sequências de números racionais positivos, a FRACTRAN. Vamos conhecê-la.

É dada uma sequência de racionais positivos. Em cada passo da execução de um programa FRACTRAN, a entrada é um inteiro positivo que deve ser multiplicado pelo primeiro número da sequência tal que o produto seja inteiro. Esse produto é a entrada do próximo passo.

Para o primeiro passo sempre se toma uma potência de 2, isto é, $N_1 = 2^n$, para n inteiro positivo. O programa termina quando obtemos novamente uma potência de 2. Dizemos que tal potência de 2 é a *saída* de nosso programa. Complicado? Um exemplo deve ajudar.

Considere a sequência $A = (f_1;\ f_2;\ f_3;\ f_4;\ f_5; f_6) = \left(\frac{52}{33}; \frac{44}{39}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}; \frac{3}{2}; 11\right)$. Para a entrada 2^3, os passos são:

$$N_1 = 2^3$$
$$N_2 = N_1 f_5 = 2^3 \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot 2^2$$
$$N_3 = N_2 f_5 = 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{2} = 3^2 \cdot 2$$
$$N_4 = N_3 f_5 = 3^2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 3^3$$
$$N_5 = N_4 f_6 = 3^3 \cdot 11$$
$$N_6 = N_5 f_1 = 3^3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$
$$N_7 = N_6 f_2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot \frac{44}{39} = 2^4 \cdot 3 \cdot 11$$
$$N_8 = N_7 f_1 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \frac{52}{33} = 2^6 \cdot 13$$
$$N_9 = N_8 f_4 = 2^6 \cdot 13 \cdot \frac{1}{13} = 2^6$$

A saída é, portanto, 2^6. Para facilitar o entendimento do processo, os passos foram escritos explicitando-se as fatorações em primos das entradas.

Pode-se provar que, para a sequência A, se a entrada é 2^n, a saída é 2^{2n}.

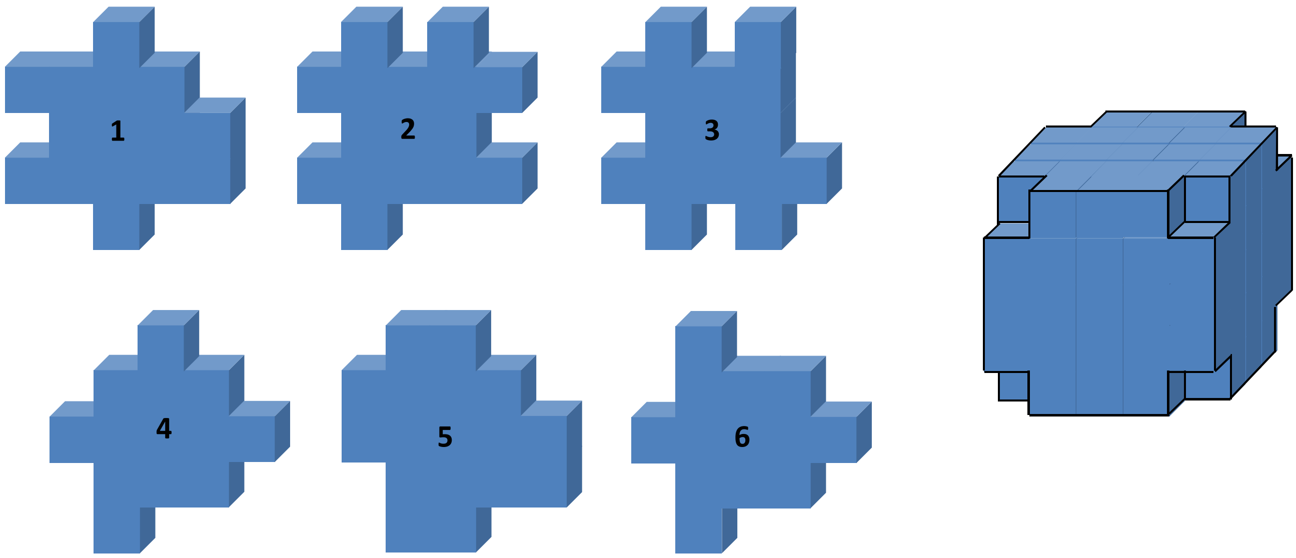
a) Considerando novamente a sequência A, escreva todos os passos para a entrada $N_1 = 2^2$. Sabemos que a saída é 2^4, mas você deve listar todos os passos intermediários.

b) Seja n inteiro positivo. Apresente uma sequência de racionais positivos B tal que, se a entrada é 2^n, a saída é 2^{3n+1}.

PROBLEMA 5

Esmeralda tem um quebra-cabeça formado por seis peças de espessura 1 as quais devem formar um sólido oco que corresponde a um cubo com aresta 5 menos os cubos unitários nos vértices.

A seguir mostramos as peças e o sólido montado (sem as divisões entre peças nem os números das peças). Os números devem ficar para o lado de fora do sólido e as peças podem ser giradas (observe que as peças 2 e 3 são iguais).



a) Quais são os pares de peças opostas, ou seja, que não se tocarão no cubo montado?

b) Desenhe as peças na planificação dada na folha de respostas, indicando como montar o cubo. Já marcamos uma peça para você.