

# XXXIII OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

## Prova da Fase Final (7 de novembro de 2009)

### Nível $\gamma$ (1ª e 2ª séries do Ensino Médio)



#### Folha de Perguntas

#### Instruções:

- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora (não é permitida a de telefones celulares).
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

#### PROBLEMA 1

Charles Dodgson, autor do livro *Alice no País das Maravilhas* sob o pseudônimo Lewis Carroll, obteve uma identidade que permitiu o desenvolvimento de um algoritmo para o cálculo de determinantes. Ilustraremos o algoritmo com a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Primeiro, calculamos os determinantes  $2 \times 2$  com duas linhas e duas colunas vizinhas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

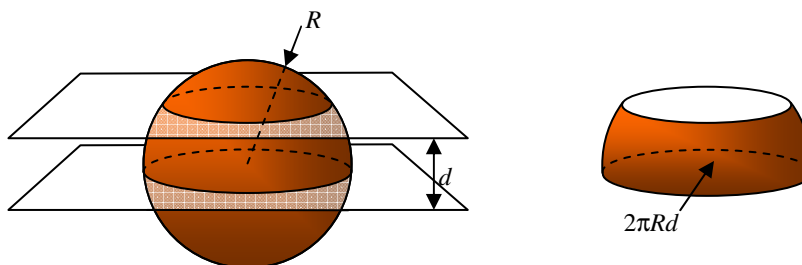
Note que  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$ , e assim por diante. Depois, eliminamos os números na borda, obtendo

$$\begin{vmatrix} -7 & 11 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \\ 9 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Em seguida, calculamos novamente os determinantes  $2 \times 2$  com duas linhas e duas colunas vizinhas e dividimos pelos números centrais correspondentes:

#### PROBLEMA 2

Pode-se provar que a superfície de uma esfera de raio  $R$  limitada entre dois planos paralelos e secantes à esfera que estão a uma distância  $d$  (a qual também chamamos *altura*) um do outro é  $2\pi R d$ .



Por simplicidade, a partir de agora chamaremos tais superfícies de esfera limitadas por planos apenas de *superfícies*.

a) Dadas  $m$  superfícies de altura 2 que, juntas e possivelmente com alguma superposição, cobrem uma esfera de raio  $R$ , mostre que  $m \geq R$ .

**Atenção:** Os planos não precisam ser todos paralelos entre si.

b) Muitos problemas de Geometria Plana podem ser resolvidos mais facilmente ao estendê-los para a Geometria Espacial. Um exemplo é:

*Dados  $m$  retângulos de dimensões 2 e  $2R$  que, juntos e possivelmente com alguma superposição, cobrem um círculo de raio  $R$ , é verdade que  $m \geq R$ ?*

Resolva o problema acima.

$$\begin{vmatrix} -7 & 11 & 5 \\ -16 & 19 & 2 \\ 3 & -7 & 1 \\ 9 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

Note que, por exemplo,  $19 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}}{3}$ . Eliminamos mais uma vez os números na borda, obtendo

$$\begin{vmatrix} -16 & 19 \\ 45 & -25 \end{vmatrix}$$

Com isso, podemos calcular o determinante, obtendo

$$\det A = \frac{\begin{vmatrix} -16 & 19 \\ 45 & -25 \end{vmatrix}}{-7} = 65.$$

a) Utilizando o método acima, calcule o determinante  $4 \times 4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

b) Utilize o algoritmo para provar a fórmula de Vandermonde para determinantes  $4 \times 4$ , sendo  $a, b, c$  e  $d$  distintos e não nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$$

### PROBLEMA 3

O truque mais impressionante do Grande Benjamini é tão difícil que mesmo ele nem sempre consegue acertá-lo:

- Cada um dos espectadores do seu show escolhe um número inteiro positivo distinto (um sistema digital garante que não há a escolha de números repetidos). Benjamini não recebe nenhuma informação sobre tais números. Apenas sabe qual é o total de espectadores e, portanto, o total de números.
- Esses números são, então, colocados em uma urna e passam a ser retirados, um por um.
- O fantástico matemático vai acompanhando o sorteio e em certo momento o interrompe para dizer que o maior número da urna acaba de ser escolhido.

Como vocês são amantes da Matemática, ele decidiu revelar sua estratégia (só para vocês!):

1) Ele ignora os primeiros  $s$  números. De fato, ele apenas registra qual é o maior entre os  $s$  primeiros números.

*Você deve estar se perguntando: e se o maior número estiver entre os  $s$  primeiros? Nós dissemos que o truque nem sempre dá certo!*

2) Então ele espera o primeiro número sorteado que supera o maior dos  $s$  primeiros e o anuncia como o maior da urna.

*Você deve estar se perguntando: e se o maior número ainda estiver na urna? Lembre-se: o truque nem sempre dá certo!*

O que é incrível é que Benjamini acerta o truque mais de um terço das vezes! Muito mais do que uma vez em  $n$ , o quanto poderíamos esperar de “trouxas” (isto é, não matemáticos).

a) Suponha que tenham sido retirados  $k$  números da urna,  $s \leq k \leq n$ . Qual é a probabilidade de que o maior entre os  $k$  números tenha saído entre os  $s$  primeiros?

b) Mostre que, sendo  $n$  o número de espectadores, a probabilidade de o truque dar certo é  $\frac{s}{n} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \dots + \frac{1}{n-1} \right)$ .

c) Pode-se demonstrar que a expressão  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m-1}$  é aproximadamente igual a  $\ln m$ .

i) Seja  $\frac{s}{n} = x$ . Mostre que a expressão  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \dots + \frac{1}{n-1}$  é aproximadamente igual a  $\ln \frac{1}{x}$ .

ii) Considerando as aproximações acima, prove que realmente é possível escolher  $s$  de modo que a probabilidade de acertar o truque seja superior a um terço.

### PROBLEMA 4

Seja  $n$  um inteiro positivo. Vamos definir a função de Möebius  $\mu(n)$ . Se na fatoração em primos de  $n$ ,  $n > 1$ , todos os expoentes são iguais a 1, então  $\mu(n) = (-1)^v$ , em que  $v$  é o número de fatores primos de  $n$ . Caso contrário,  $\mu(n) = 0$ . Finalmente,  $\mu(1) = 1$ . Por exemplo: como  $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ ,  $\mu(2010) = (-1)^4 = 1$ ; e, como  $2009 = 7^2 \cdot 41$ ,  $\mu(2009) = 0$ .

a) Seja  $m > 1$  um número com  $k$  divisores primos positivos distintos. Prove que a quantidade de divisores  $d$  de  $m$  tais que  $\mu(d) = -1$  é

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \binom{k}{5} + \dots$$

b) Demonstre que para  $m$  inteiro,  $m > 1$ ,  $\sum_{d|m} \mu(d) = 0$ . Observe que o somatório em questão percorre todos os divisores de  $m$ ; por exemplo,

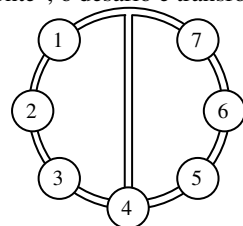
$$\text{para } m = 12, \sum_{d|12} \mu(d) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(4) + \mu(6) + \mu(12) = 1 + (-1)^1 + (-1)^1 + 0 + (-1)^2 + 0 = 0.$$

c) Prove que, para  $-1 < x < 1$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n) \cdot x^n}{1-x^n} = x$ .

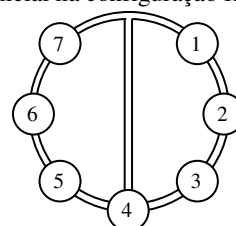
*Observação: Nessa questão talvez você deseje utilizar a fórmula da soma da PG infinita:  $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots = \frac{a_1}{1-q}$ ,  $-1 < q < 1$ .*

### PROBLEMA 5

No quebra-cabeça “Cruzando a Ponte”, o desafio é transformar a configuração inicial na configuração final.



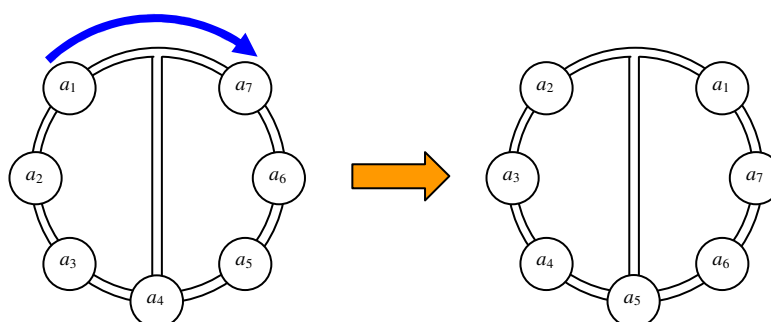
Configuração inicial



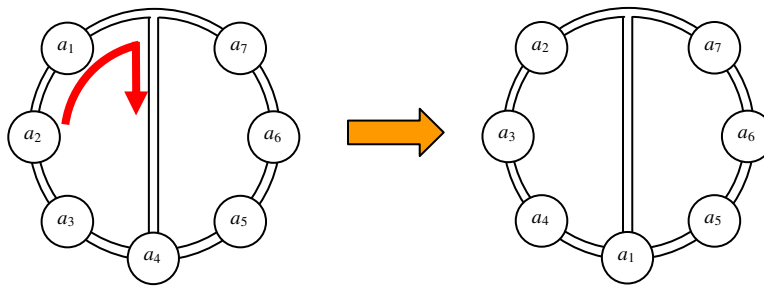
Configuração final

Os movimentos permitidos são:

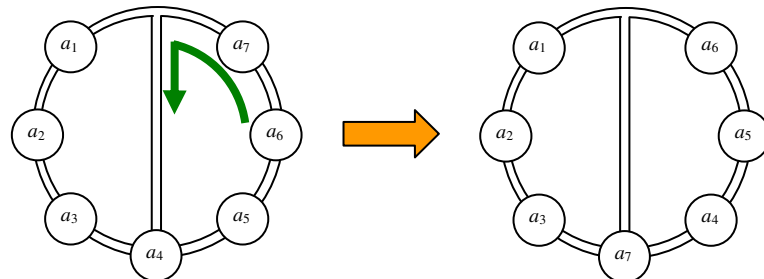
R: Rotacionar os números no sentido horário.



$\alpha$ : Cruzar a ponte com  $a_1$ , movendo também os demais números da metade esquerda.



$\beta$ : Cruzar a ponte com  $a_7$ , movendo também os demais números da metade direita.



Mostraremos nessa questão como as permutações podem nos ajudar a resolver quebra-cabeças como o “Cruzando a Ponte” (Um outro exemplo é o célebre Cubo de Rubik™).

• Inicialmente um pouco de notação: (Talvez agora você tenha uma sensação de *déjà vu*, a explicação a seguir já foi dada no problema 5 da Primeira Fase da OPM 2008.)

A permutação  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de  $1, 2, \dots, n$  pode ser representada como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

E observamos que 1 é levado a  $a_1$ , 2 é levado a  $a_2$ , etc.

Há uma outra maneira de apresentar permutações. Por exemplo, na permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

temos que o 1 é levado ao 6; o 6, por sua vez, é levado ao 2 e do 2 volta-se para o 1, completando o que passaremos a chamar de *ciclo*. Começando agora pelo 3, menor número que não aparece no ciclo anterior, temos  $3 \rightarrow 7 \rightarrow 3$ , fechando mais um ciclo. Finalmente temos um ciclo formado apenas pelo 4, que é levado a ele mesmo, e outro formado apenas pelo 5.

Tais características da permutação dada podem ser resumidas escrevendo  $(1\ 6\ 2)(3\ 7)(4)(5)$ . Em tal notação, vale a pena observar a importância dos parênteses:

$(1\ 6\ 2)(3\ 7)(4\ 5)$ , por exemplo, é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 7 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

• Assim, cada movimento corresponde a uma operação sobre o conjunto das permutações de  $1, 2, \dots, 7$ . Mais uma vez exemplificando:

- Se o nosso primeiro movimento for  $\alpha$ , isto é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ ou } (1\ 4\ 3\ 2)(5)(6)(7),$$

então o 1 vai para a 4ª posição, o 4 para a 3ª posição, o 3 para a 2ª, o 2 para a 1ª e os demais números ficam em suas posições iniciais.

- E se fizermos o movimento  $\beta$  seguido de outro  $\beta$ , isto é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ ou } (1)(2)(3)(4\ 6)(5\ 7),$$

então o 4 vai para a 6ª posição, o 6 para a 4ª, o 5 para a 7ª, o 7 para a 5ª e os demais números ficam em suas posições iniciais.

• E, finalmente, podemos passar para as perguntas! Em todos os itens considere que estamos partindo da configuração inicial.

a) i) Escreva, utilizando a notação de ciclos, qual permutação obtemos ao fazer o movimento  $\alpha$  seguido de  $R$  (denominaremos tal composição de movimentos  $\alpha R$ ).

ii) Escreva a permutação obtida ao fazermos  $(\alpha R)^5$ , ou seja,  $\alpha R \alpha R \alpha R \alpha R \alpha R$ .

iii) Escreva a permutação obtida ao fazermos  $(\alpha R)^{10}$ .

b) Mostre como resolver o quebra-cabeça usando apenas os movimentos  $\alpha$  e  $R$ .

c) Esmeraldinho quebrou seu jogo *Cruzando a Ponte*, de modo que só é possível fazer os movimentos  $\alpha$  e  $\beta$ . É ainda possível resolver o quebra-cabeça? Ou Esmeraldinho deve jogar seu brinquedo no cestinho vermelho dos recicláveis?