XXX OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Prova da Fase Final (10 de novembro de 2007)

Nível β ($8^{\underline{o}}$ e $9^{\underline{o}}$ anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

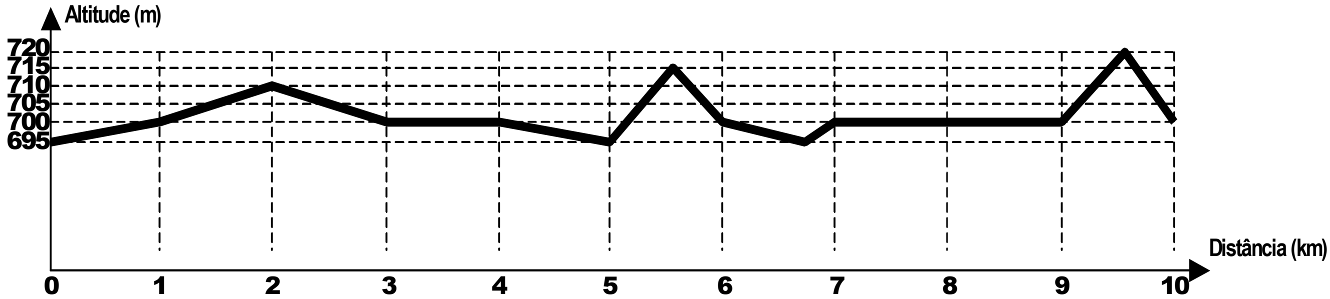
Folha de Perguntas

Instruções:
- A duração da prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

PROBLEMA 1

Amanhã, na avenida da Raia da USP (logo aí ao lado; talvez você consiga vê-la pela janela!), haverá a largada de uma corrida de 10 quilômetros, a Nike 10K.

Um dos aspectos mais importantes para quem participa de corridas longas é a variação de altitude do percurso de prova, ou seja, o quanto as subidas e descidas são inclinadas. Para tanto, a organização do evento fez um gráfico indicando a altitude de acordo com a distância do percurso:



a) Qual é a diferença entre as altitudes do ponto mais alto e do ponto mais baixo do percurso da Nike 10K?

b) Um dos pontos cruciais da corrida de São Silvestre, realizada no último dia do ano em São Paulo, é quando os corredores sobem a avenida Brigadeiro Luiz Antônio, a "subida da Brigadeiro". Sabendo que as altitudes nos quilômetros 13 e 14 da corrida de São Silvestre, que compreendem a avenida, são respectivamente 782 m e 811 m, em qual das duas competições os corredores enfrentam a subida mais inclinada? Não se esqueça de justificar sua resposta!

PROBLEMA 2

A primeira fase da prova da FUVEST, o maior vestibular do Brasil, consiste em 90 questões de múltipla escolha (testes). Cada teste tem 5 alternativas, das quais somente uma é a correta. Os candidatos devem escolher uma das 5 alternativas de cada teste, e a sua pontuação na primeira fase é igual à quantidade de testes que ele acertar.

O estudante Z chuta em todas as provas tipo testes, ou seja, escolhe a alternativa de cada teste ao acaso, sem mesmo lê-lo.

Variáveis cujos valores não podem ser previstos com exatidão, como a quantidade de testes que Z acertaria na FUVEST, são denominadas *variáveis aleatórias* e são o principal objeto de estudo da Estatística.

Duas das medidas mais importantes de uma variável aleatória são o seu *valor esperado* e o seu *desvio padrão*. O *valor esperado* é a média da variável quando se repete o experimento muitas vezes (no nosso caso, qual seria a pontuação média de Z caso ele pudesse fazer a prova da primeira fase da FUVEST várias vezes). O *desvio padrão* mede o quanto a variável aleatória se distancia em média do seu valor esperado. Quanto maior o desvio padrão, maior a variação.

Seja X a variável aleatória que descreve a quantidade de testes que Z acerta em uma prova com n testes. Sendo p e q respectivamente as probabilidades de Z acertar um teste e errar um teste, pode-se mostrar que X tem valor esperado $\mu = n \cdot p$ e desvio padrão $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

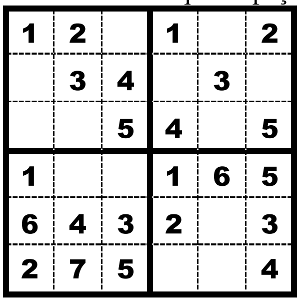
Além disso, sabe-se da Estatística que, com aproximadamente 99,9999998% de certeza, a nota de Z em uma prova de n testes é maior ou igual a $\mu - 6\sigma$ e menor ou igual a $\mu + 6\sigma$.

a) Determine os valores das probabilidades p e q de Z acertar um teste e errar um teste, respectivamente.

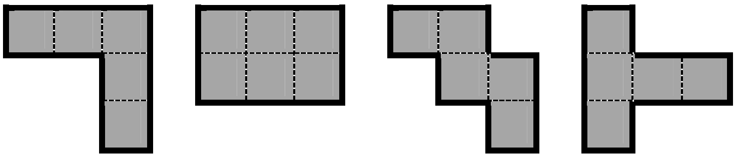
b) O estudante Z quer ser médico. Para ser aprovado em Medicina na FUVEST, no ano passado, ele precisaria acertar 71 dos 90 testes na primeira fase. Supondo que essa pontuação não mude, mostre que, com mais do que 99,9999998% de certeza, ele não será aprovado.

PROBLEMA 3

O jogo *Esconde Números* tem quatro peças e um tabuleiro dividido em quatro regiões com números pintados, como mostra a figura.



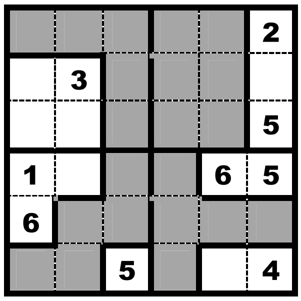
Tabuleiro



Peças

Além do tabuleiro e das peças, o jogo tem cartelas com desafios. Cada desafio corresponde a uma coleção de números, possivelmente com números repetidos ou omitidos. O jogador deve colocar uma peça sobre cada região e cobrir todos os números, exceto os números do desafio.

Por exemplo, uma solução do desafio (um 1; um 2; um 3; um 4; três 5; dois 6) está ao lado.



Observe que as quatro peças na solução do desafio (um 1; um 2; um 3; um 4; três 5; dois 6) cobrem, juntas, sete espaços vazios, ou seja, espaços nos quais não estão marcados números, e quatorze números.

a) Para o desafio (dois 1; dois 2), mostre que as quatro peças deverão cobrir, juntas, exatamente dois espaços vazios e dezenove números.

b) Mostre que o desafio (dois 1; dois 2) tem única solução, ou seja, há uma única maneira de cobrir o tabuleiro de modo que fiquem visíveis apenas dois 1 e dois 2.

PROBLEMA 4

a) Determine constantes $A \in R$ e $B \in R$ tais que $\dfrac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} = A + \dfrac{B}{(2n-1)(2n+1)}$ para todo n inteiro positivo.

b) Determine constantes $C \in R$ e $D \in R$ tais que $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{C}{2n-1} + \dfrac{D}{2n+1}$.

c) Podemos dizer que a identidade obtida no item a é um "pequeno milagre" e a do item b é uma aplicação de uma técnica muito importante: escrever como soma de *frações parciais*. Utilizando as duas identidades, calcule a seguinte soma de 1002 termos:

$$\frac{1\cdot 3}{3\cdot 5} + \frac{2\cdot 4}{5\cdot 7} + \frac{3\cdot 5}{7\cdot 9} + \cdots + \frac{1002\cdot 1004}{2005\cdot 2007},$$

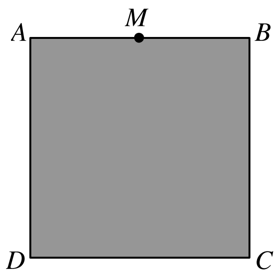
em que cada termo é da forma $\dfrac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}$, com $2 \le n \le 1003$.

PROBLEMA 5

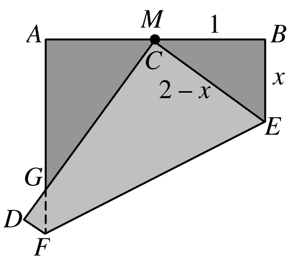
Alguns historiadores afirmam que os antigos egípcios mediam ângulos retos utilizando uma corda marcada por 11 nós igualmente espaçados, dividindo-a em 12 pedaços iguais. Para fazer a medição, a corda era estendida de modo a formar o famoso triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5. Esse triângulo e todos os triângulos semelhantes a ele são denominados *triângulos egípcios*.

Veremos nesse problema que triângulos egípcios podem aparecer de uma maneira bastante inusitada: com dobraduras!

Considere uma folha de papel na forma de um quadrado *ABCD* de lado 2. Seja *M* o ponto médio de *AB*.

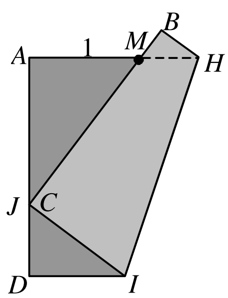


a) Esmeralda dobrou o papel de modo que o vértice *C* coincida com o ponto médio *M*.



Se $x = BE$, note que $EC = EM = 2 - x$. Mostre que o triângulo *BME* é egípcio, ou seja, é semelhante ao triângulo de lados 3, 4 e 5.

b) Diamantino dobrou outra folha igual à de Esmeralda de modo que o vértice *C* fique sobre o lado *AD* e o lado *BC* passe sobre o ponto *M*.



Prove que os triângulos *MAJ*, *JDI* e *BMH* são egípcios.