XXV Olimpíada Paulista de Matemática

Prova da Fase Final (10 de Novembro de 2001)

Nível γ ($1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ séries do Ensino Médio)

www.opm.mat.br

Folha de Perguntas

Instruções:

- A duração desta prova é de 3h30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min.
- Nesta prova há 5 problemas. Cada problema vale 2,0 pontos.
- Preencha todos os dados pessoais solicitados no *Bloco de Resoluções*.
- Todas as respostas devem ser **justificadas**. Respostas e justificativas devem ser apresentadas no *Bloco de Resoluções*.
- Resoluções a tinta ou a lápis. É permitido o uso de calculadora.
- Ao terminar, entregue apenas o *Bloco de Resoluções* e leve esta *Folha de Perguntas* com você.

▸PROBLEMA 1

Estudos com textos de várias línguas indicam que as freqüências das palavras nesses textos seguem, aproximadamente, a *Lei de Zipf: ao contarmos quantas vezes aparece cada uma das palavras de um texto, o número de ocorrências da n-ésima palavra mais freqüente é inversamente proporcional a n.*

Assim, por exemplo, a segunda palavra mais comum ocorre com metade da freqüência da palavra mais comum.

Na obra "Fausto" de J. W. Goethe, a nona palavra mais freqüente é "sich", que ocorre 770 vezes. Sabendo que o texto completo tem 68470 palavras, calcule o número aproximado de palavras distintas em "Fausto".

As seguintes aproximações podem ser úteis:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\approx \ln N+0,58 \qquad e\approx 2,7 \qquad e^2\approx 7,4 \qquad e^3\approx 20,1 \qquad e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2} \text{ para } 0\leqslant x\leqslant 1$$

▸PROBLEMA 2

Considere o conjunto $S=\{n_1,n_2,\dots,n_7\}$ em que

$$n_1=7 \qquad n_2=5\cdot 7^3\cdot 13\cdot 17\cdot 19 \qquad n_3=2^2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11$$
$$n_4=3\cdot 5^5\cdot 7\cdot 11 \qquad n_5=2\cdot 5\cdot 13\cdot 19 \qquad n_6=2\cdot 3\cdot 5\cdot 13 \qquad n_7=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13^5$$

Para cada subconjunto de S, fazemos $x_i=1$ se n_i pertence ao subconjunto e $x_i=0$ caso contrário, $i=1,2,\dots,7$. Por exemplo, para $\{n_1,n_6,n_7\}$, temos $x_1=x_6=x_7=1$ e $x_2=x_3=x_4=x_5=0$.

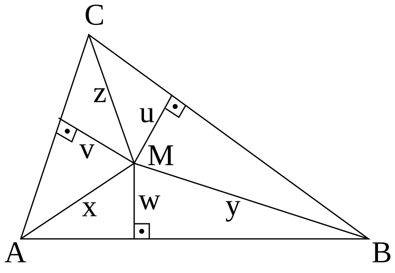
(a) Mostre que o produto dos números em um subconjunto de S é um quadrado perfeito se, e somente se,

$$\begin{array}{cc} x_5+x_6+x_7 & x_3+x_4 \\ x_3+x_4+x_6+x_7 & x_2+x_5+x_6+x_7 \\ x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 & x_2 \\ x_1+x_2+x_4+x_7 & x_2+x_5 \end{array}$$

são pares.

(b) Quantos subconjuntos não vazios de S satisfazem a propriedade de que o produto dos elementos do subconjunto é um quadrado perfeito?

▸PROBLEMA 3



(a) Na figura acima, considere pontos B_1 e C_1 sobre as semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente.

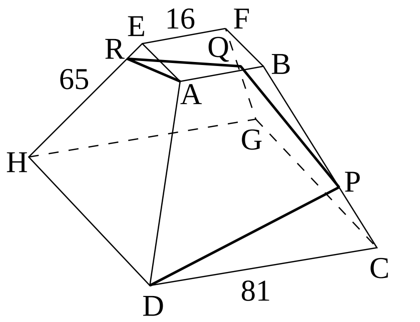
  (i) Mostre que a soma das áreas dos paralelogramos com lados AB_1 e AM e com lados AC_1 e AM é igual à área do paralelogramo tal que um de seus lados é B_1C_1 e o outro é paralelo a AM.

  (ii) Tomando $AB_1=AC$ e $AC_1=AB$, conclua que $AB\cdot v+AC\cdot w\leqslant BC\cdot x$

(b) Prove a *Desigualdade de Erdős-Mordell*: $2(u+v+w)\leqslant x+y+z$

PROBLEMA 4

Uma pirâmide asteca é um tronco de pirâmide regular de base quadrada. As arestas das bases inferior e superior medem 81 m e 16 m, respectivamente, e as arestas laterais medem 65 m. Em volta da pirâmide asteca será construída uma rampa para os turistas. A rampa deve começar em um dos vértices da base inferior (D), terminar em um dos vértices da base superior (A) e sua inclinação vertical deve ser sempre a mesma, como mostra a figura.

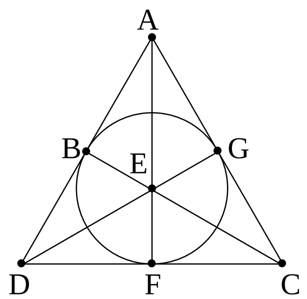


(a) Mostre que os ângulos agudos das faces laterais medem $60°$.

(b) Calcule as medidas de BP, FQ e ER.

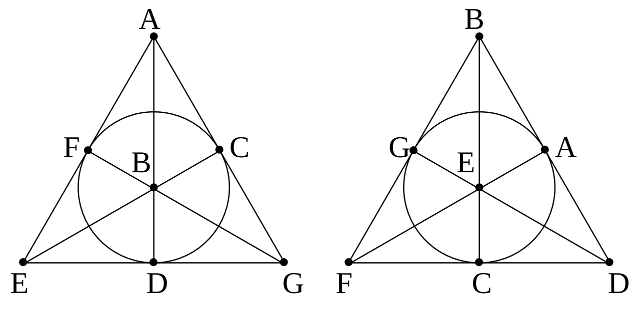
PROBLEMA 5

No condado Heptaprojetivo havia 7 castelos, batizados segundo grandes personagens: Arnold (A), Borcherds (B), Conway (C), Dilbert (D), Erdős (E), Faltings (F), Gowers (G). Havia também 7 ruas, cada uma com 3 castelos, como mostra o mapa a seguir (uma rua é circular):



Um belo dia, o conde Steiner decidiu retirar as placas que identificavam os castelos para fazer uma limpeza. Na hora de recolocá-las, ninguém se lembrava do lugar correto de cada uma, nem mesmo os moradores dos castelos! Os arquivos do condado só indicavam os castelos que ficavam numa mesma rua, mas não a ordem em que eles estavam. Assim, o conde sabia que havia uma rua com os castelos $\{A, B, D\}$, outra com $\{B, C, E\}$, outra com $\{B, F, G\}$, etc.

Frente aos fatos, Steiner resolveu determinar todas as maneiras de recolocar as placas respeitando os arquivos do condado, isto é, todas as maneiras nas quais placas que estavam juntas em uma mesma rua continuassem juntas em uma rua, possivelmente em outra ordem. Duas destas maneiras estão representadas a seguir:



Chamaremos essas maneiras de *válidas*.

(a) Prove que o total de maneiras válidas é 7 vezes o número de maneiras válidas nas quais a placa A é colocada no castelo A.

(b) Prove que o total de maneiras válidas nas quais a placa A é colocada no castelo A é 6 vezes o número de maneiras válidas nas quais a placa A é colocada no castelo A e a placa B é colocada no castelo B.

(c) Determine o número de maneiras válidas.