X OLIMPÍADA de MAIO (2004)
Segundo nível
Soluções e critérios de pontuação

PROBLEMA 1

O João escreveu cinco números inteiros positivos, não necessariamente distintos, tais que o seu produto é igual à sua soma. Quais podem ter sido os números escritos pelo João?

Solução I

Sejam a, b, c, d, e os cinco inteiros positivos tais que a sua soma coincide com o seu produto, isto é, $a+b+c+d+e = abcde$, onde $0 < a \le b \le c \le d \le e$. Dividindo por $abcde$ ambos os membros da igualdade anterior tem-se

$$\frac{1}{bcde} + \frac{1}{acde} + \frac{1}{abde} + \frac{1}{abce} + \frac{1}{abcd} = 1.$$

Como e é o maior dos inteiros, cada fracção é menor ou igual a $\frac{1}{abcd}$ e portanto $abcd \le 5$. Assim $a = b = 1$ e $c = 1$ ou $c = 2$. Se $c = 1$, tem-se $3 + d + e = de$. Deste modo $d \neq 1$. Se $d = 2$, tem-se $e = 5$; se pusermos $d = 3$, obtém-se $e = 3$. Como $e \ge d$, não se pode ter $d \ge 4$. Se $c = 2$, tem-se $2d \le 5$, donde $d = 2$ e então $a + b + c + d + e = abcde$ implica que $e = 2$. Obtemos três soluções: $\{1, 1, 1, 2, 5\}, \{1, 1, 1, 3, 3\}$ e $\{1, 1, 2, 2, 2\}$.

Solução II

Sejam $a \le b \le c \le d \le e$ os cinco inteiros tais que a sua soma coincide com o seu produto, ordenados do menor ao maior, tem-se

$$abcde = a + b + c + d + e. \tag{1}$$

Se $a \ge 2$, tem-se $abcde \ge 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot e = 16e$ e $a+b+c+d+e \le 5e$, e não se verifica a relação (1). Portanto $a = 1$.

Se $b \ge 2$, tem-se $abcde \ge 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot e = 8e$ e $a+b+c+d+e \le 1+4e$, e não se verifica a relação (1). Portanto $b = 1$.

Se $c \ge 2$, tem-se $abcde \ge 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot e = 4e$ e $a+b+c+d+e \le 2+3e$, e então para que se verifique (1) é necessário que $4e \le 2 + 3e$, isto é, $e \le 2$. Como $2 \le c \le d \le e \le 2$, tem-se $c = d = e = 2$.

Se $c = 1$, devem procurar-se as soluções de $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot d \cdot e = 1 + 1 + 1 + d + e$. Obtém-se $d \cdot e - d - e = 3$, que pode escrever-se na forma

$$(d-1)(e-1) = 4.$$

As soluções inteiras positivas desta equação, com $d \le e$, são $d - 1 = 1$ e $e - 1 = 4$; $d - 1 = 2$ e $e - 1 = 2$, que correspondem a $d = 2$ e $e = 5$; $d = 3$ e $e = 3$.

Resumindo, há três soluções:

$$a = b = 1 \text{ e } c = d = e = 2;\ a = b = c = 1 \text{ e } d = e = 3;\ a = b = c = 1, d = 2 \text{ e } e = 5.$$

Critérios de correcção:

Solução I

Ordena os 5 números		1 ponto
Divide por $abcde$		3 pontos
Obtém $abcd \le 5$		3 pontos
Por cada uma das soluções correctas atribui-se 1 ponto	até	3 pontos
TOTAL		10 pontos

Solução II

Ordena os 5 números de forma crescente ou decrescente		1 ponto
Demonstra que $a = 1$		2 pontos
Demonstra que $b = 1$		2 pontos
Demonstra que $c \leq 2$		2 pontos
Encontra a solução com $c = 2$		1 ponto
Encontra a solução com $c = 1$		2 pontos
TOTAL		10 pontos
As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores		
Por cada solução correcta, sem nenhuma explicação, atribui-se 1 ponto	até	3 pontos
Realiza algum estudo que não seja exaustivo	até	2 pontos
TOTAL	até	5 pontos

PROBLEMA 2

A mãe do Pedrito quer preparar n pacotes de 3 caramelos para oferecer na festa de aniversário e, para isso, irá comprar caramelos sortidos de 3 sabores distintos. Ela pode comprar qualquer número de caramelos mas não pode escolher quantos são de cada sabor. Ela quer pôr em cada pacote um caramelo de cada sabor, e se isso não for possível usará só caramelos de um sabor e todos os pacotes terão 3 caramelos desse sabor. Determina o menor número de caramelos que deve comprar para poder formar os n pacotes. Explica porque razão se comprar menos caramelos não tem a certeza de poder formar os pacotes da maneira que quer.

Solução

O menor número de caramelos é $7n - 2$.

Mostre-se que com $7n - 2$ podem formar-se os n pacotes, e que se se tiver no máximo $7n - 3$ caramelos talvez seja impossível formar os pacotes.

Tendo $7n-2$ caramelos mas não podendo preparar pacotes de 3 sabores distintos é porque de pelo menos um dos sabores há $n - 1$ ou menos caramelos (não são suficientes para pôr um em cada pacote). Então pelo menos $7n - 2 - (n - 1) = 6n - 1$ caramelos são dos outros dois sabores. Nesse caso, de um desses 2 sabores há pelo menos $3n$ caramelos e podem formar-se os n pacotes com 3 caramelos desse sabor em cada um.

Veja-se uma situação possível com $7n - 3$ caramelos em que não é possível formar os pacotes. Tendo $n - 1$ caramelos de um sabor e $3n - 1$ de cada um dos outros dois sabores, no total há $n - 1 + 3n - 1 + 3n - 1 = 7n - 3$ caramelos. Não se podem formar n pacotes de 3 sabores em cada um (não há suficientes do primeiro sabor) nem se podem formar os n pacotes com 3 caramelos de um mesmo sabor porque não há $3n$ caramelos iguais.

Critérios de correcção:

Demonstra que com $7n - 2$ caramelos se podem formar n pacotes	6 pontos
Demonstra que tendo no máximo $7n - 3$, pode ser impossível formar os n pacotes	4 pontos
TOTAL	10 pontos
As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores	
Demonstra que, para $n = 2$, com 12 caramelos podem formar-se n pacotes	1 ponto
Demonstra que com 11 ou menos pode ser impossível formar os n pacotes	1 ponto
TOTAL	2 pontos
As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores	
Demonstra para 3 ou mais valores que com $7n - 2$ caramelos se podem formar n pacotes	3 pontos
Demonstra, para esses mesmos valores de n, que com no máximo $7n - 3$ pode ser impossível formar os n pacotes	2 pontos
TOTAL	5 pontos

PROBLEMA 3

Dispomos de uma mesa de bilhar de 8 metros de comprimento e 2 metros de largura, com uma única bola no seu centro. A bola é lançada em linha recta e, depois de percorrer 29 metros, pára numa esquina da mesa. Quantas vezes tocou a bola nos bordos da mesa?

Nota: Quando a bola toca num bordo da mesa e retorna os ângulos que a sua trajectória forma com os bordos da mesa são iguais.

Solução I

Cada vez que a bola toca num lado da mesa, imagina-se outra mesa igual ao lado e que a bola passa à mesa adjacente. Assim, o movimento da bola é uma linha recta. Se a é o número de toques com o lado menor e b o número de toques com o lado maior, tem-se

$$\left[8\left(a+\frac{1}{2}\right)\right]^2+\left[2\left(b+\frac{1}{2}\right)\right]^2=29^2$$

isto é,

$$(8a+4)^2+(2b+1)^2=29^2. \tag{2}$$

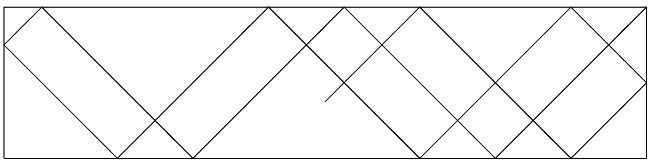
Utilizando a forma geral dos trios pitagóricos que satisfazem $c^2+d^2=29^2$, obtém-se $c=8a+4=20$ e $d=2b+1=21$. Logo, $a=2$ e $b=10$. A resposta é 12 vezes.

Ou também, desenvolvendo quadrados em (2)

$$\begin{aligned}64a^2+64a+16+4b^2+4b+1&=841\\64a^2+64a+4b^2+4b&=824\\16a(a+1)+b(b+1)&=206.\end{aligned}$$

Então, tem-se $a\le 3$; a única solução possível é $a=2$, $b=10$.

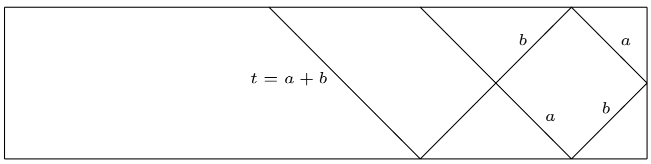
A seguinte figura representa a trajectória da bola.



Solução II

Se a trajectória da bola é simétrica em relação ao centro do rectângulo (mesa) pode pensar-se que a trajectória procurada é metade daquela que sai de uma esquina e finaliza na esquina oposta, de comprimento $2\cdot 29=58$, e tem metade dos toques desta. Analisem-se dois casos. Se o primeiro toque ocorre num dos lados maiores (de 8 m) depois de percorrer um segmento de longitude t, entre dois toques consecutivos no lado maior percorre sempre um comprimento t, apesar de por vezes haver um toque intermédio no lado menor (de 2 m).

A bola vai e vem entre os lados menores, e depois de percorrer um número ímpar de vezes o comprimento da mesa, pára na esquina oposta à de saída (o número de comprimentos é ímpar e a esquina final é oposta à de saída em virtude da simetria da trajectória em relação ao centro).



Digamos que percorreu $2k+1$ vezes o comprimento da mesa, e como consequência tocou $2k$ vezes no lado menor. Além disso, e novamente por simetria, o número de toques no lado maior é par, digamos $2j$, logo a bola percorreu $2j+1$ troços de comprimento t. Tem-se

$$t=\sqrt{2^2+\left(\frac{8(2k+1)}{2j+1}\right)^2}$$

e o comprimento do caminho é

$$(2j+1)\sqrt{2^2+\left(\frac{8(2k+1)}{2j+1}\right)^2}=58,$$

com $2k+2j$ toques.

Fazendo os cálculos, tem-se $2^2(2j+1)^2+(8(2k+1))^2=58^2$, isto é, $(2j+1)^2+(8k+4)^2=29^2$.

Se o primeiro toque é num lado menor, com as mesmas notações do caso anterior, e sendo s o comprimento do caminho entre dois toques no lado menor, obtém-se $s=\sqrt{8^2+\left(\frac{2(2j+1)}{2k+1}\right)^2}$ e $(2k+1)\sqrt{8^2+\left(\frac{2(2j+1)}{2k+1}\right)^2}=58$, donde, novamente $(8k+4)^2+(2j+1)^2=29^2$.

Os possíveis valores de k são $0,1,2$ e 3. Analisando um a um, o único admissível é $k=2$ e, nesse caso, $j=10$.

Determinou-se que a trajectória de 58 m tem $2k+2j=2\cdot 2+2\cdot 10=24$ toques, e a de 29 m tem 12 toques (2 nos lados menores e 10 nos lados maiores).

Critérios de correcção:

Solução I

Identifica correctamente a trajectória na mesa com linhas paralelas a duas direcções	1 ponto
Considera a trajectória recta	2 pontos
Identifica correctamente a trajectória como a hipotenusa de um triângulo rectângulo	2 pontos
Relaciona os catetos do triângulo com o número de toques	3 pontos
Resolve a equação obtida	2 pontos
TOTAL	10 pontos

Solução II

Identifica correctamente a trajectória na mesa com linhas paralelas a duas direcções		1 ponto
Simetriza a trajectória		2 pontos
Define a constante t (ou a constante s)		2 pontos
Calcula o comprimento t (ou s) en função do número de toques		2 pontos
Estabelece a equação		1 ponto
Resolve essa equação		2 pontos
TOTAL		10 pontos
As seguintes pontuações não se acumulam com as anteriores		
Desenha algumas trajectórias usando exclusivamente linhas paralelas a duas direcções		1 ponto
Calcula os comprimentos de algumas trajectórias com 1, 2 ou 3 toques		2 pontos
TOTAL	até	3 pontos

PROBLEMA 4

Determina todos os números inteiros positivos x,y,z que verificam

$$x\cdot y\cdot z=4104 \quad \text{e} \quad x+y+z=77.$$

Solução I

Sejam $x\le y\le z$ os três números reais tais que

$$x\cdot y\cdot z=4104$$
$$x+y+z=77.$$

O maior dos três números, z, deve ser maior ou igual a $\frac{77}{3}=26,666$, e menor ou igual a 75 (pois x e y são pelo menos 1).

Factorizando, $4104=2^3\cdot 3^3\cdot 19$.

Os possíveis valores de z são os divisores de 4104, entre 27 e 75, isto é:

$$3^3=27; 2^2\cdot 3^2=36; 2\cdot 19=38; 2\cdot 3^3=54; 3\cdot 19=57; 2^3\cdot 3^2=72.$$

Se $z=27$,

$$x+y=50$$
$$x\cdot y=152,$$

então x e y devem ser ambos pares e menores que 27. Como $2 \cdot 19 = 38$, não há solução.

Se $z = 36$,

$$x + y = 41$$
$$x \cdot y = 114,$$

então x e y devem ser menores que 36. A única possibilidade é 6 e 19, que não somam 41.

Se $z = 38$,

$$x + y = 39$$
$$x \cdot y = 108,$$

então x e y devem ser menores que 38, um par e outro ímpar. Podem ser 4 e 27, 12 e 9 ou 36 e 3. A única que satisfaz $x + y = 39$ é $x = 3$, $y = 36$.

Se $z = 54$,

$$x + y = 23$$
$$x \cdot y = 76,$$

então x e y devem ser menores que 23, um par e outro ímpar. A única possibilidade é $x = 4$, $y = 19$, que são solução.

Se $z = 57$,

$$x + y = 20$$
$$x \cdot y = 72,$$

então x e y devem ser ambos pares e menores que 20; podem ser 4 e 18 ou 12 e 6. Nenhuma delas é solução.

Se $z = 72$,

$$x + y = 5$$
$$x \cdot y = 57,$$

que obviamente não tem solução.

Obtiveram-se as duas soluções seguintes (são todas):

$$x = 3, y = 36, z = 38; \quad x = 4, y = 19, z = 54.$$

Solução II

As decomposições de 4104 em três factores tais que o factor que tem o primo 19 seja menor que 77 são:

Com factor 19

			Soma
19	1	$2^3 \cdot 3^3 = 216$	236
19	2	$2^2 \cdot 3^3 = 108$	129
19	3	$2^3 \cdot 3^2 = 72$	94
19	2^2	$2 \cdot 3^3 = 54$	77
19	$2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3^2 = 36$	61
19	2^3	$3^3 = 27$	54
19	3^2	$2^3 \cdot 3 = 24$	52
19	$2^2 \cdot 3$	$2 \cdot 3^2 = 18$	49

Com factor $2 \cdot 19 = 38$

			Soma
38	1	$2^2 \cdot 3^3 = 108$	147
38	2	$2 \cdot 3^3 = 54$	94
38	3	$2^2 \cdot 3^2 = 36$	77
38	2^2	$3^3 = 27$	69
38	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 3^2 = 18$	62
38	3^2	$2^2 \cdot 3 = 12$	59

Com factor $3 \cdot 19 = 57$

			Soma
57	1	$2^3 \cdot 3^2 = 72$	130
57	2	$2^2 \cdot 3^2 = 36$	95
57	3	$2^3 \cdot 3 = 24$	84
57	2^2	$2 \cdot 3^2 = 18$	79
57	$2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3 = 12$	75
57	2^3	$3^2 = 9$	74

As restantes decomposições não interessam, pois terão um factor da forma $k \cdot 19$, com $k \geq 4$ e $k \cdot 19 \geq 4 \cdot 19 = 76$, logo não se verificará a condição de que os três números somem 77.

Os três números só poderão ser 4,19 e 54 ou 3,36 e 38.

Critérios de correcção:

Solução I

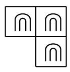
Factoriza 4104		1 ponto
Majora o maior dos números		2 pontos
Enumera os divisores de 4104 compreendidos entre as cotas determinadas		1 ponto
Para cada um destes valores de z analisa os possíveis valores de x e y	até	4 pontos
Por cada uma das soluções correctas atribui-se 1 ponto	até	2 pontos
TOTAL		10 pontos

Solução II

Factoriza 4104		1 ponto
Majora o inteiro que é múltiplo de 19 (19, 2.19 e 3.19)		3 pontos
Em cada caso analisa os possíveis valores para os outros dois inteiros	até	4 pontos
Por cada uma das soluções correctas atribui-se 1 ponto	até	2 pontos
TOTAL		10 pontos

PROBLEMA 5

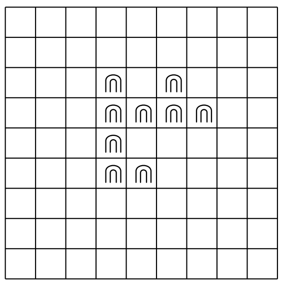
Sobre um tabuleiro 9×9, dividido em quadrados 1×1, colocam-se, sem sobreposições e sem sair do tabuleiro, peças da forma



Cada peça cobre exactamente três quadrados.

(a) A partir do tabuleiro vazio, quantas peças, no máximo, se podem colocar?

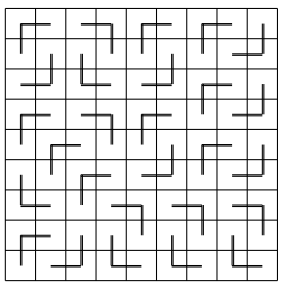
(b) A partir do tabuleiro com 3 peças já colocadas como mostra o diagrama seguinte,



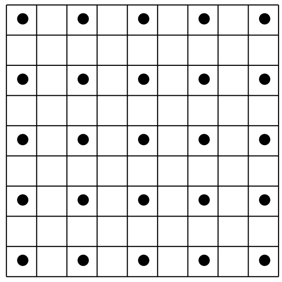
quantas peças, no máximo, se podem colocar?

Solução

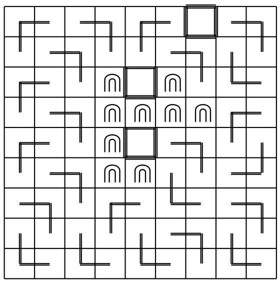
(a) Podem colocar-se 27 peças que cubram completamente o tabuleiro:



8(b) Verifique-se primeiro que é impossível cobrir completamente o tabuleiro: Marcam-se 25 quadrados com um ponto (ver figura). Cada peça cobre um ou nenhum dos quadrados marcados. Para cobrir o tabuleiro usam-se $\frac{81}{3} = 27$ peças. As 3 peças já colocadas não cobrem nenhum dos quadrados marcados, então, com as restantes 24 será impossível cobrir os 25 quadrados que têm um ponto.



Portanto o número total de peças, contando com as 3 já colocadas, é menor ou igual a 26. No diagrama que se segue mostra-se uma maneira de juntar 23 peças às já colocadas, e no tabuleiro ficam 26 peças.



Critérios de correcção:

Solução

(a) Coloca bem as 27 peças		3 pontos
(b) Junta correctamente 23 peças		3 pontos
Demonstra que não é possível juntar 24 peças	até	4 pontos
TOTAL		10 pontos